INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXVII. BAND DRITTES HEFT 1959

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 10. August 1959

Postverlagsort Berlin *Preis DM 10,60*

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. **K. Magnus**, Stuttgart O, Hackländerstraße 33

Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12

Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg

Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin-Wilmersdorf

Heidelberger Platz 3 / Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01

Inhalt:

Seite

Bufler, H., Zur Theorie der rollenden Reibung. Mit 9 Abbildungen 137

Lippmann, H., Ebenes Hochkantbiegen eines schmalen Balkens unter Berücksichtigung der Verfestigung. Mit 9 Abbildungen 153

Rimrott, F., Versagenszeit beim Kriechen. Mit 5 Abbildungen 169

Horvay, G., I. Giaever and *J. A. Mirabal*, Thermal stresses in a heat-generating cylinder: The variational solution of a boundary layer problem in three-dimensional elasticity. Mit 6 Abbildungen 179

Satō, K., Large deflection of a circular cantilever beam with uniformly distributed load. Mit 4 Abbildungen 195

Meyer zur Capellen, W., Berichtigung zum Beitrag „Die Beschleunigungsänderung" in Heft 2 dieses Bandes 200

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. **K. Magnus**, Stuttgart O, Hackländerstraße 33

Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12

Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg

Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin-Wilmersdorf

Heidelberger Platz 3 / Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01

Inhalt:

Seite

Bufler, H., Zur Theorie der rollenden Reibung. Mit 9 Abbildungen 137

Lippmann, H., Ebenes Hochkantbiegen eines schmalen Balkens unter Berücksichtigung der Verfestigung. Mit 9 Abbildungen 153

Rimrott, F., Versagenszeit beim Kriechen. Mit 5 Abbildungen 169

Horvay, G., I. Giaever and *J. A. Mirabal*, Thermal stresses in a heat-generating cylinder: The variational solution of a boundary layer problem in three-dimensional elasticity. Mit 6 Abbildungen 179

Satō, K., Large deflection of a circular cantilever beam with uniformly distributed load. Mit 4 Abbildungen 195

Meyer zur Capellen, W., Berichtigung zum Beitrag „Die Beschleunigungsänderung" in Heft 2 dieses Bandes 200

INGENIEUR-ARCHIV

XXVII. BAND DRITTES HEFT 1959

Zur Theorie der rollenden Reibung

Von H. Bufler

1. Übersicht. Wegen ihrer technischen Bedeutung haben sich schon mehrere Forscher mit denjenigen Fragen auseinandergesetzt, die in mittelbarem oder unmittelbarem Zusammenhang mit dem Vorgang der rollenden Reibung stehen. Einen geschichtlichen Rückblick hierzu hat *L. Föppl*[1] gegeben. Trotz zahlreicher experimenteller und theoretischer Untersuchungen gibt es jedoch noch verschiedene Probleme, für die bisher noch keine befriedigende oder noch gar keine Lösung gefunden wurde. Während für gleiche elastische Konstanten der beiden in Berührung stehenden oder aufeinander abrollenden Walzen die wesentlichen Fragen geklärt sind, stehen diese im Falle verschiedener elastischer Konstanten noch offen.

Im folgenden wird eine Übersicht der mit der rollenden Reibung zusammenhängenden Probleme gegeben, wobei eine Einteilung in drei Hauptfälle vorgenommen wird.

Fall I: Beide Walzen werden durch die Kraft P zusammengedrückt (Abb. 1a).

A. Bei gleichen elastischen Konstanten der Walzen tritt längs der Berührungsfläche keine Schubspannung auf, und es gilt die gewöhnliche *Hertz*sche Druckverteilung.

B. Bei verschiedenen elastischen Konstanten ist eine Schubspannung vorhanden, die ihrerseits die Druckverteilung beeinflußt. Zu unterscheiden ist hier zwischen dem reinen Haftfall und dem gemischten Fall, bei dem das Berührungsgebiet sich in eine Haft- und in zwei Gleitzonen gliedert.

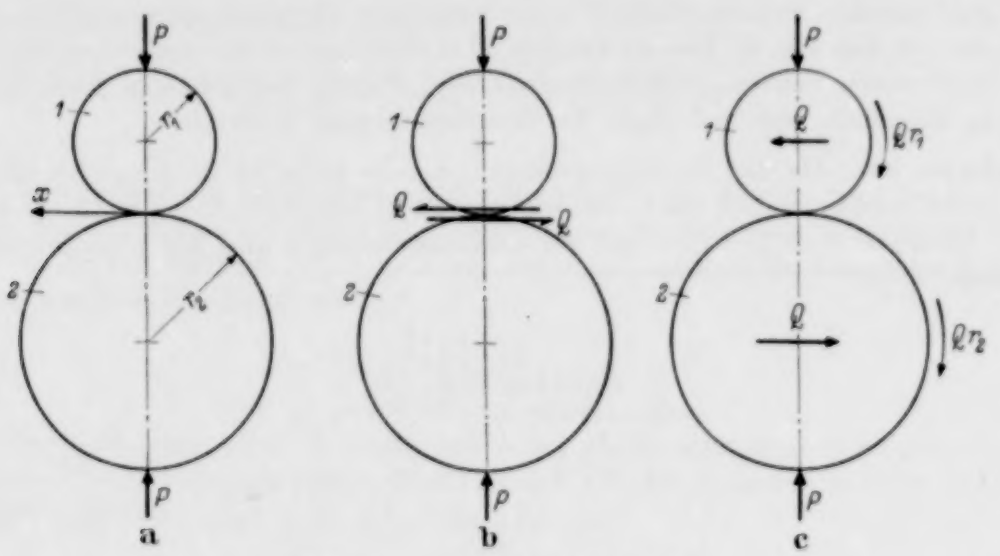

Abb. 1. Beanspruchung der beiden Walzen.
a) durch die Normalkraft P; b) durch die Normalkraft P und die Schubkraft Q (kein Rollen); c) durch die Normalkraft P und die Schubkraft Q, wobei beide Walzen aufeinander abrollen (Rad 2 sei das Treibrad).

a) Haftfall: Dieser wurde von *K. Desoyer*[2] untersucht. Allerdings enthalten seine Ausgangsgleichungen Fehler, wie ich in Ziff. 2 zeigen werde, so daß er kein richtiges Resultat erzielt.

b) Gemischter Fall: *A. Schäfer*[3] behandelte dieses Problem unter Zugrundelegung der *Hertz*schen Druckverteilung, was jedoch streng genommen nicht zulässig ist.

Fall II: Beide Walzen werden erst durch die Kraft P zusammengedrückt und dann mit der Schubkraft Q belastet, wobei kein Rollen stattfindet (Abb. 1b).

---

[1] *L. Föppl*, Die strenge Lösung für die rollende Reibung, München 1947.

[2] *K. Desoyer*, Österr. Ing.-Arch. 11 (1957), S. 146.

[3] *A. Schäfer*, Die Reibung beim Walzendruck bei verschiedenen Elastizitätsmoduln. Diss. TH München (1948).

A. Bei gleichen elastischen Konstanten gilt die *Hertz*sche Druckverteilung, denn die Schubspannungen haben hier keine Rückwirkungen auf den übertragenen Druck, wie erstmals *H. Fromm*[1] nachgewiesen hat.

a) Haftfall: Dieser (nur bei unendlich großem Reibungskoeffizienten mögliche) Fall ist relativ einfach zu behandeln (s. Gl. (55)).

b) Gemischter Fall: Das Berührgebiet zerfällt hier in eine mittlere Haftzone und in eine vordere und eine hintere Gleitzone.

c) Gleitfall: Die Lösungen für den Spannungszustand in den Walzen wurden unter Zugrundelegung des *Coulomb*schen Reibungsgesetzes angegeben von *L. Föppl*[2] und *F. Karas*[3].

B. Bei verschiedenen elastischen Konstanten unterscheidet man ebenfalls

a) den Haftfall,

b) den gemischten Fall und

c) den Gleitfall.

Fall III: Dieser Fall unterscheidet sich von Fall II dadurch, daß die beiden Walzen aufeinander abrollen (Abb. 1c).

A. Bei gleichen elastischen Konstanten gilt wieder die *Hertz*sche Druckverteilung, die durch die Schubspannungen nicht beeinflußt wird.

a) Haftfall: Dieser ist nur bei unendlich großem Reibungskoeffizienten möglich und wurde von *L. Föppl*[4] (S. 11) gelöst.

b) Gemischter Fall: Das Berührgebiet zerfällt hier in eine Haftzone auf der Anlaufseite und eine anschließende Gleitzone. Die Lösung hat *G. Heinrich*[5] angegeben.

c) Gleitfall: Hier gilt das unter Fall II, A, c) Gesagte.

B. Für verschiedene elastische Konstanten liegen Untersuchungen von *K. Desoyer*[6] vor, und zwar

a) für den Haftfall,

b) für den gemischten Fall und

c) für den Gleitfall, der identisch ist mit Fall II, B, c). Allerdings sind die von *Desoyer* angegebenen Ergebnisse wegen Fehler in den Ausgangsgleichungen nicht korrekt.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich in der Hauptsache mit den unter I, B, a) und II, A, a) sowie III, B, c) genannten Problemen. Für die Druck- und Schubspannungsverteilung längs der Berührungsfläche ergeben sich im Haftfall zwei gekoppelte singuläre Integralgleichungen, die sich in zwei Punkten von den von *K. Desoyer* hergeleiteten Gleichungen unterscheiden und infolgedessen zu anderen Ergebnissen führen. Darüberhinaus wird für die betrachteten Fälle die tangentiale Randspannung innerhalb und außerhalb der Berührungszone ermittelt.

2. Randdeformation. Da die Berührungslänge $2a$ sehr klein ist im Vergleich zu den Walzenhalbmessern, kann man bezüglich des Spannungszustandes zwei unendliche Halbscheiben zugrundelegen, die im Intervall $-a \leqq x \leqq a$ mit der Druckspannung p und der Schubspannung q beansprucht werden.

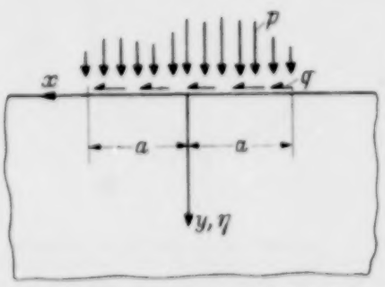

Abb. 2. Bezeichnungen an der Halbscheibe.

Für die Berührbedingung und die Haftbedingung ist die Kenntnis der tangentialen Randdehnung $(\varepsilon_x)_{y=0}$ und der Ableitung der Verschiebung η nach x, $\partial\eta/\partial x$ erforderlich. Die Verschiebung η zähle hierbei positiv ins Innere der Halbscheibe (wegen der Bezeichnungen, siehe Abb. 2).

[1] *H. Fromm*, Z. angew. Math. Mech. 7 (1927), S. 27 .
[2] *L. Föppl*, Forsch. Ing.-Wes. 7 (1936), S. 141.
[3] *F. Karas*, Forsch. Ing.-Wes. 12 (1941), S. 266.
[4] Siehe Fußnote 1, Seite 137.
[5] *G. Heinrich*, Österr. Ing.-Arch. 4 (1950), S. 363.
[6] Siehe Fußnote 2 von S. 137.

Nach dem *Hooke*schen Gesetz gelten folgende Spannungs-Dehnungs-Beziehungen:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\,(\sigma_y + \sigma_z)\right], \tag{1}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\,(\sigma_x + \sigma_z)\right], \tag{2}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\,(\sigma_x + \sigma_y)\right]. \tag{3}$$

Hierin bedeutet E den Elastizitätsmodul und ν die Querdehnzahl.

Setzt man einen ebenen Formänderungszustand voraus, so erhält man wegen $\varepsilon_z = 0$ aus (1), (2), (3)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\,\sigma_x - \nu\,(1+\nu)\,\sigma_y\right], \tag{4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\,\sigma_y - \nu\,(1+\nu)\,\sigma_x\right]. \tag{5}$$

Für einen ebenen Spannungszustand gilt dagegen wegen $\sigma_z = 0$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\,\sigma_y\right], \tag{6}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\,\sigma_x\right]. \tag{7}$$

Wie ein Vergleich der Ausdrücke (4), (5) mit (6), (7) zeigt, gehen die Formeln (4), (5) des ebenen Formänderungszustandes in diejenigen des ebenen Spannungszustandes (6), (7) formal dadurch über, daß man $\nu^2 = 0$ setzt. Es genügt daher, die Rechnung zunächst nur für den ebenen Formänderungszustand durchzuführen und erst die Ergebnisse auch auf den ebenen Spannungszustand auszudehnen[1].

Für die tangentiale Randdehnung $(\varepsilon_x)_{y=0}$ der Halbscheibe erhält man wegen $(\sigma_y)_{y=0} = -p$ aus (4)

$$(\varepsilon_x)_{y=0} = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\,(\sigma_x)_{y=0} + \nu\,(1+\nu)\,p\right]. \tag{8}$$

Die Spannung $(\sigma_x)_{y=0}$ beträgt hierbei

$$(\sigma_x)_{y=0} = -p(\bar{x}) - \frac{2}{\pi}\,\oint\limits_{-1}^{+1} \frac{q(\bar{u})}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u}\,. \tag{9}$$

(Das Zeichen $\oint$ besagt, daß das Integral wegen der Singularität des Integranden bei $\bar{u} = \bar{x}$ für $\bar{x}^2 < 1$ als *Cauchy*scher Hauptwert zu verstehen ist.) Der Querstrich über einer Koordinate bedeutet hier wie im folgenden den mit der Strecke a (zunächst noch unbekannte halbe Länge des Berührgebietes) dimensionslos gemachten Ausdruck, also

$$\bar{x} = \frac{x}{a}\,, \qquad \bar{u} = \frac{u}{a}\,, \qquad \bar{y} = \frac{y}{a}\,. \tag{10}$$

Der erste Anteil in (9) rührt vom Normaldruck p her (hydrostatischer Spannungszustand[2]); der zweite kommt von der Schubspannung q; denn für eine mit der positiven x-Achse gleichgerichtete, bei $x = 0$ angreifende Schubkraft Q (je Scheibendicke) gilt[3]

$$(\sigma_x)_{y=0} = -\frac{2\,Q}{\pi\,a}\,\frac{1}{\bar{x}}\,,$$

woraus für eine kontinuierliche Lastverteilung durch Integration über den gesamten Lastbereich für den Aufpunkt $\bar{x}$

$$(\sigma_x)_{y=0} = -\frac{2}{\pi}\,\oint\limits_{-1}^{+1} \frac{q(\bar{u})}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u}$$

[1] Streng genommen ist der sich tatsächlich in den Walzen einstellende Spannungszustand in der Umgebung der Berührungsfläche dreidimensional. Um das Problem jedoch zweidimensional behandeln zu können, werden als Vereinfachung die beiden Grenzfälle des ebenen Spannungszustandes und des ebenen Formänderungszustandes zugrundegelegt. Bei relativ dünnen Scheiben ist in Wirklichkeit der erstgenannte Fall zuständig, bei sehr breiten Walzen dagegen der zweite.

[2] *L. Föppl*, Drang und Zwang, Bd. 3, S. 37, München 1947.

[3] *L. Föppl*, a. a. O. S. 29.

folgt. Gleichung (8) mit (9) ergibt somit

$$(\varepsilon_x)_{y=0} = -\frac{1}{E}\left[(1-\nu-2\nu^2)\,p(\bar{x}) + \frac{2}{\pi}(1-\nu^2)\oint_{-1}^{+1}\frac{q(\bar{u})}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u}\right]. \tag{11}$$

Zwecks Ermittlung der Randverschiebung η bzw. der Ableitung $\partial\eta/\partial x$ für die Halbscheibe greifen wir auf (5) zurück:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\,\sigma_y - \nu(1+\nu)\,\sigma_x\right]. \tag{12}$$

Der Beitrag, der von p herrührt, wird zweckmäßig dadurch ermittelt, daß man von einer im Koordinatenursprung angreifenden Normalkraft P (je Scheibendicke) ausgeht[1], welche in der Halbscheibe die Normalspannungen

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi a}\frac{\bar{x}^2\bar{y}}{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^2}$$

und

$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi a}\frac{\bar{y}^3}{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^2}$$

zur Folge hat.

Nach Einsetzen in (12) und Integration zwischen der oberen Grenze $\bar{y}=0$ und der unteren Grenze $\bar{y}=\bar{h}$ erhält man die Randverschiebung μ relativ zur Linie $y=h$

$$\eta^{(P)} = -\frac{P}{\pi E}\left[(1-\nu^2)\ln\frac{\bar{x}^2}{\bar{x}^2+\bar{h}^2} + (1+\nu)\frac{\bar{h}^2}{\bar{x}^2+\bar{h}^2}\right].$$

Nimmt man $\bar{h}$ im Vergleich zu $\bar{x}$ sehr groß, so folgt

$$\eta^{(P)} = -\frac{P}{\pi E}\left[(1-\nu^2)\ln\left(\frac{\bar{x}}{\bar{h}}\right)^2 + 1 + \nu\right].$$

Daraus bekommt man, wenn man auf eine kontinuierliche Lastverteilung übergeht,

$$\eta^{(p)} = -\frac{a}{\pi E}\oint_{-1}^{+1} p(\bar{u})\left[(1-\nu^2)\ln\left(\frac{\bar{x}-\bar{u}}{\bar{h}}\right)^2 + 1 + \nu\right]d\bar{u}.$$

Der Differentialquotient $\partial\eta^{(p)}/\partial x$ ist somit

$$\frac{\partial\eta^{(p)}}{\partial\bar{x}} = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\,a\oint_{-1}^{+1}\frac{p(\bar{u})}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u}. \tag{13}$$

Um den Beitrag zu η zu ermitteln, der von der Schubspannung q kommt, sei von einer im Bereich $\bar{c}\leqq\bar{x}\leqq\bar{c}$ konstanten, mit der positiven x-Achse gleichgerichteten Schubspannungsverteilung q_0 ausgegangen. Diese führt zu den Normalspannungen[2]

$$\sigma_x = -\frac{2}{\pi}q_0\ln\frac{r_1}{r_2} - \frac{q_0}{2\pi}(\cos 2\alpha_2 - \cos 2\alpha_1),$$

und

$$\sigma_y = -\frac{q_0}{2\pi}(\cos 2\alpha_1 - \cos 2\alpha_2),$$

wobei

$$r_1 = a\cdot\sqrt{\bar{y}^2+(\bar{c}+\bar{x})^2}, \qquad \cos 2\alpha_1 = 1 - \frac{2\bar{y}^2}{\bar{y}^2+(\bar{c}+\bar{x})^2},$$

$$r_2 = a\cdot\sqrt{\bar{y}^2+(\bar{c}-x)^2}, \qquad \cos 2\alpha_2 = 1 - \frac{2\bar{y}^2}{\bar{y}^2+(\bar{c}-\bar{x})^2}$$

ist. Setzt man diese Ausdrücke in (12) ein und integriert über $\bar{y}$, so bekommt man

$$\eta^{(q_0)} = \frac{q_0 a}{\pi E}\left[(1-\nu-2\nu^2)\,J + \nu(1+\nu)\ln\frac{\bar{y}^2+(\bar{c}+\bar{x})^2}{\bar{y}^2+(\bar{c}-\bar{x})^2}\right],$$

wobei

$$J = (\bar{c}-\bar{x})\operatorname{arctg}\frac{\bar{y}}{\bar{c}-\bar{x}} - (\bar{c}+\bar{x})\operatorname{arctg}\frac{\bar{y}}{\bar{c}+\bar{x}}$$

[1] *L. Föppl*, a. a. O. S. 61.
[2] *L. Föppl*, a. a. O. S. 39.

ist. Nimmt man als obere Grenze des Integrals $\bar{y} = 0$, als untere Grenze $\bar{y} = \infty$, so folgt

$$\eta^{(q_0)} = \frac{q_0}{E}(1 - \nu - 2\nu^2)\, a \cdot \begin{cases} \bar{x} & \text{für} \quad |\bar{x}| < \bar{c}\,, \\ \bar{c} & \text{für} \quad \bar{x} > \bar{c}\,, \\ -\bar{c} & \text{für} \quad \bar{x} < -\bar{c} \end{cases}$$

und nach Differentiation

$$\frac{\partial \eta^{(q_0)}}{\partial \bar{x}} = \begin{cases} \frac{q_0}{E}(1 - \nu - 2\nu^2)\, a & \text{für} \quad |\bar{x}| < \bar{c}\,, \\ 0 & \text{für} \quad |\bar{x}| > \bar{c}\,. \end{cases} \tag{14}$$

Bei einer veränderlichen Lastverteilung $q = q(\bar{x})$ kann man eine Aufteilung der Belastung in einzelne Laststreifen $q(\bar{x})\, dx = a\, q(\bar{x})\, d\bar{x}$ vornehmen. Für jeden einzelnen Streifen gilt dann die Beziehung (14), die aussagt, daß $\partial\eta/\partial\bar{x}$ proportional der Belastungsordinate an der betrachteten Stelle ist und unabhängig von den Belastungen außerhalb davon. Man kann daher allgemein schreiben

$$\frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial x} = \frac{(1 - \nu - 2\nu^2)}{E}\, a\, q(\bar{x})\,. \tag{15}$$

Insgesamt gilt somit nach Überlagerung von (13) und (15)

$$\frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} = -\frac{a}{E}\left[-(1 - \nu - 2\nu^2)\, q(\bar{x}) + \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{p(\bar{u})}{\bar{x} - \bar{u}}\, d\bar{u}\right]. \tag{16}$$

Die den Ausdrücken (10) und (16) entsprechenden Gleichungen für den ebenen Spannungszustand erhält man, wie eingangs erwähnt, dadurch, daß man $\nu^2 = 0$ setzt:

$$(\varepsilon_x)_{y=0} = -\frac{1}{E}\left[(1 - \nu)\, p(\bar{x}) + \frac{2}{\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{q(\bar{u})}{\bar{x} - \bar{u}}\, d\bar{u}\right], \tag{17}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} = -\frac{a}{E}\left[-(1 - \nu)\, q(\bar{x}) + \frac{2}{\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{p(\bar{u})}{\bar{x} - \bar{u}}\, du\right]. \tag{18}$$

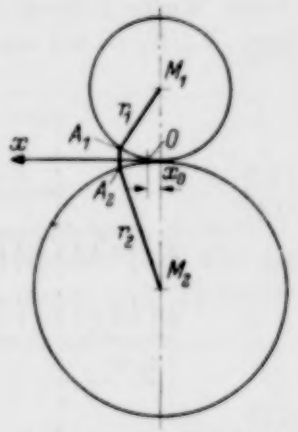

Abb. 3. Zur Herleitung der Berührbedingung.

Gleichung (17) stimmt mit Gleichung (22) von *K. Desoyer* überein, Gleichung (18) weicht dagegen im Vorzeichen bei q von seiner aus Gleichung (3) mit (1), (2) resultierenden Formel ab, was auf einen dort vorhandenen Vorzeichenfehler zurückgeht, der bereits in Gleichung (13) von *G. Heinrich*[1] enthalten ist. Ferner gewinnt *Desoyer* die für den ebenen Formänderungszustand maßgebenden Gleichungen aus denjenigen des ebenen Spannungszustandes unrichtigerweise dadurch, daß er statt E den Wert $E/(1 - \nu^2)$ setzt. Die Unzulässigkeit dieses Schrittes zeigt der Vergleich der Formeln (17), (18) (ebener Spannungszustand) mit den Formeln (11), (16) (ebener Formänderungszustand).

3. Berührbedingung. Zur Herleitung der Berührbedingung gehen wir von Abb. 3 aus.[2] Die elastische Annäherung der Kreismittelpunkte M_1 und M_2 ist, wenn 0 den (nachträglich noch zu bestimmenden) Mittelpunkt des Berührgebiets bedeutet

$$\Lambda = \overline{A_1 A_2} + \eta_1 + \eta_2\,.$$

Ferner gilt aus geometrischen Gründen in erster Näherung

$$\overline{A_1 A_2} = \frac{a^2}{2}(\bar{x}_0 + \bar{x})^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Da für jeden Punkt des Berührgebiets $\Lambda = \text{konst}$ ist, muß auch $\partial\Lambda/\partial\bar{x} = 0$ sein, woraus die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\eta_1 + \eta_2) = -a^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)(\bar{x}_0 + \bar{x}) \qquad \text{für } \bar{x}^2 < 1 \tag{19}$$

[1] Siehe Fußnote 5 von Seite 138.
[2] Siehe *L. Föppl*, Drang und Zwang, Bd. 3, S. 67.

folgt. Entnehmen wir nun $\partial\eta_1/\partial\bar{x}_1$ und $\partial\eta_2/\partial\bar{x}_2$ aus (16) (ebener Formänderungszustand) bzw. (18) (ebener Spannungszustand) und beachten, daß gemäß Abb. 4

$$x_2 = x\,, \quad u_2 = u\,, \quad q_2 = q\,, \quad p_2 = p\,,$$
$$x_1 = -x\,, \quad u_1 = -u\,, \quad q_1 = q\,, \quad p_1 = p\,,$$

ist, wobei der Index 1 sich auf die obere, der Index 2 sich auf die untere Walze bezieht, so erhält man nach Einsetzen in (19) die Berührbedingung in der Form

$$\oint_{-1}^{+1} \frac{p(\bar{u})}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u} - C\,q(\bar{x}) = B\,a\,(x_0+\bar{x}) \qquad \text{für } \bar{x}^2 < 1 \tag{20}$$

Hierin bedeuten

$$B = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) E_1 E_2 : \begin{cases} E_1(1-\nu_2^2) + E_2(1-\nu_1^2) & \text{beim ebenen Formänderungszustand,} \\ E_1 + E_2 & \text{beim ebenen Spannungszustand.} \end{cases} \tag{21}$$

und

$$C = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \dfrac{E_1(1-\nu_2-2\nu_2^2) - E_2(1-\nu_1-2\nu_1^2)}{E_1(1-\nu_2^2) + E_2(1-\nu_1^2)} & \text{beim ebenen Formänderungszustand,} \\ \dfrac{E_1(1-\nu_2) - E_2(1-\nu_1)}{E_1+E_2} & \text{beim ebenen Spannungszustand.} \end{cases} \tag{22}$$

Der für C mögliche Bereich ist

$$-\frac{\pi}{2} \leqq C \leqq \frac{\pi}{2}\,.$$

Falls Walze 1 (bzw. 2) als starr im Vergleich zu Walze 2 (bzw. 1) zu betrachten ist ($E_1/E_2 = \infty$ bzw. $E_2/E_1 = \infty$) und Walze 2 (bzw. 1) die Querdehnzahl null besitzt, so gilt $C = \pi/2$ (bzw. $C = -\pi/2$); bestehen dagegen beide Walzen aus demselben Material ($E_1 = E_2, \nu_1 = \nu_2$), dann wird $C = 0$.

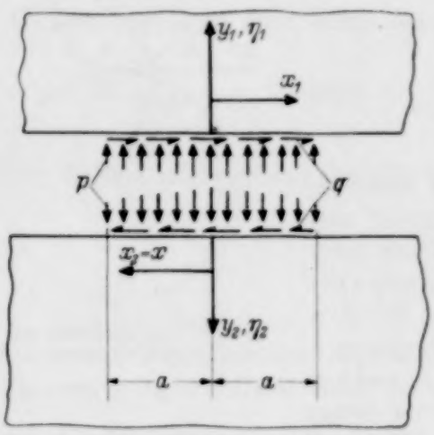

Abb. 4. Randspannungen und Koordinaten an beiden Scheiben (Walzen).

4. Haftbedingung. Wenn die beiden Walzen aufeinander abrollen, müssen in der Haftzone die sich berührenden Punkte dieselbe Geschwindigkeit haben. Diese Bedingung führt, wie von *Desoyer* gezeigt wird, in erster Näherung zu

$$\left.\begin{aligned} (\varepsilon_{x_2} - \varepsilon_{x_1})_{y=0} = \frac{S}{2\pi r_1} \quad \text{bzw.} \quad (\varepsilon_{x_1} - \varepsilon_{x_2})_{y=0} = \frac{S}{2\pi r_2} \\ \text{für } \bar{x}^2 < 1 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

je nachdem, ob Rad 1 oder Rad 2 (im Sinne der Abb. 1c) antreibt. Wesentlich dabei ist, daß der Schlupf S konstant bleibt.

Wir brauchen jetzt lediglich die Dehnungen aus (10) (ebener Formänderungszustand) bzw. (17) (ebener Spannungszustand) zu entnehmen und in (23) einzusetzen. Beachtet man dabei wieder, daß

$$x_2 = x\,, \quad u_2 = u\,, \quad q_2 = q\,, \quad p_2 = p\,,$$
$$x_1 = -x\,, \quad u_1 = -u\,, \quad q_1 = q\,, \quad p_1 = p$$

ist, so lautet die Haftbedingung

$$\oint_{-1}^{+1} \frac{q(\bar{u})}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u} + C\,p(\bar{x}) = S^* \qquad \text{(im Haftgebiet)} \tag{24}$$

wobei, falls Rad 2 im Sinne der Abb. 1c antreibt (diesen Fall wollen wir hier nur betrachten)

$$S^* = \frac{S}{4\,r_2} E_1 E_2 : \begin{cases} E_1(1-\nu_2^2) + E_2(1-\nu_1^2) & \text{beim ebenen Formänderungszustand,} \\ E_1 + E_2 & \text{beim ebenen Spannungszustand.} \end{cases} \tag{25}$$

C ist identisch mit dem in (22) angegebenen Ausdruck.

5. Der Gleitfall. Die beiden Walzen werden mit der Kraft P aufeinandergedrückt und das Antriebsmoment des Rades **2** sei so groß, daß im ganzen Berührgebiet Gleiten eintritt (Fälle II, B, c) und III, B, c))[1]. Unter Zugrundelegung des *Coulomb*schen Reibungsgesetzes gilt dann

$$q(\bar{x}) = +\mu_0\, p(\bar{x}) \tag{26}$$

mit μ_0 als Gleitreibungskoeffizienten. Das positive Vorzeichen in (26) ist durch die Antriebsrichtung des Rades **2** gemäß Abb. 1c bedingt. Gleichung (26) ersetzt die Haftbedingung.

Die Berührbedingung (20) geht mit (26) über in eine singuläre Integralgleichung 2. Art für p

$$\oint_{-1}^{+1} \frac{p(\bar{u})}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u} - C\,\mu_0\,p(\bar{x}) = B\,a\,(\bar{x}_0+\bar{x}) \qquad \text{für } \bar{x}^2<1\,. \tag{27}$$

Die entsprechende Gleichung von *Desoyer*[2] weicht von Gleichung (27) durch das umgekehrte Vorzeichen bei μ_0 ab. Der Grund hierfür ist der Vorzeichenfehler in seiner Formel für $\partial\eta/\partial x$. Durch einfache Umrechnung seiner Ergebnisse[3], für die Druckverteilung $p(\bar{x})$, die halbe Breite des Berührgebietes a und die Lage des Mittelpunktes 0 (x_0, siehe Abb. 3) ergeben sich mit den hier angewandten Bezeichnungen die korrekten Gleichungen

$$p(\bar{x}) = \frac{B\,a}{\sqrt{\pi^2+C^2\mu_0^2}}\left(\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}\right)^{\vartheta}(1+\bar{x})\,, \tag{28}$$

$$a = \sqrt{\frac{P}{2\,\vartheta\,(1-\vartheta)\,B}}\,, \tag{29}$$

$$\bar{x}_0 = \frac{x_0}{a} = 1-2\,\vartheta\,, \tag{30}$$

wobei

$$\operatorname{tg}\pi\,\vartheta = \frac{-\pi}{C\,\mu_0} \qquad (0<\vartheta<1)\,. \tag{31}$$

Die Schubspannung $q(\bar{x})$ ist durch (26) mit (28) festgelegt:

$$q(\bar{x}) = +\mu_0\,\frac{B\,a}{\sqrt{\pi^2+C^2\mu_0^2}}\left(\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}\right)^{\vartheta}(1+\bar{x})\,. \tag{32}$$

Außer der oben bestimmten Druck- und Schubspannungsverteilung interessiert der für die Beurteilung der Beanspruchung wichtige Verlauf der tangentialen Randspannung $(\sigma_x)_{y=0}$ innerhalb und außerhalb der Berührungszone. Wegen (9) können wir schreiben

$$(\sigma_x)_{y=0} = -\,p(\bar{x}) \pm \frac{2}{\pi}\oint_{-1}^{+1}\frac{q(u)}{\bar{x}-\bar{u}}\,du \qquad \text{für} \quad \bar{x}^2<1 \tag{33}$$

bzw.

$$(\sigma_x)_{y=0} = \pm\,\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{q(u)}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u} \qquad \text{für} \quad \bar{x}^2>1\,; \tag{34}$$

denn bei $\bar{x}^2>1$ ist wegen der freien Oberfläche $p=0$. Das obere Vorzeichen in (33) und (34) bezieht sich hierbei auf Walze **1**, das untere auf Walze **2**. Mit (32) wird

$$\oint_{-1}^{+1}\frac{q(\bar{u})}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u} = \mu_0\,\frac{B\,a}{\sqrt{\pi^2+C^2\mu_0^2}}\oint_{-1}^{+1}\left(\frac{1-\bar{u}}{1+\bar{u}}\right)^{\vartheta}\frac{1+\bar{u}}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u}\,.$$

Das hier auftretende Integral läßt sich folgendermaßen umschreiben:

$$\oint_{-1}^{+1}\left(\frac{1-\bar{u}}{1+\bar{u}}\right)^{\vartheta}\frac{1+\bar{u}}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u} = -\,J_1 + (1+\bar{x})\,J_3\,.$$

---

[1] Das ebene Problem eines starren Stempels beliebiger Gestalt, der auf dem Rand einer elastischen Halbscheibe gleitet, ist (nach ganz anderen Methoden) behandelt von *N. I. Muskhelishvili*, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Groningen 1953.

[2] Beim Vergleich der entsprechenden Formeln von *Desoyer*, hier (50), mit den hier abgeleiteten sind wegen der verschiedenen Festlegung der x-Achse die Indeces 1 und 2 zu vertauschen.

[3] *K. Desoyer*, a. a. O. Gleichungen (59), (58), (56).

Hierin bedeuten J_1 und J_3 die im Anhang abgeleiteten Integrale (4*) und (6*), falls man dort $\alpha = \vartheta$ setzt.[1] Damit erhält man aus (33) und (34) unter Berücksichtigung von (28) und (31)

$$(\sigma_x)_{y=0} = \begin{cases} -p(\bar{x})\left(1 \mp \frac{2}{\pi}\mu_0^2 C\right) \pm \frac{2}{\pi} B a \mu_0 (\bar{x} + 1 - 2\vartheta) & \text{für } \bar{x}^2 < 1\,, \\ \pm \frac{2}{\pi} B a \mu_0 \left| -(\bar{x}+1)\left(\frac{\bar{x}-1}{\bar{x}+1}\right)^{\vartheta} + \bar{x} + 1 - 2\vartheta \right| & \text{für } \bar{x}^2 > 1\,, \end{cases} \tag{35}$$

wobei das obere Vorzeichen für Walze **1**, das untere für Walze **2** gilt. Falls beide Walzen aus demselben Material bestehen ($C = 0$, $\vartheta = 1/2$), so folgt aus (28) die bekannte *Hertz*sche Druckverteilung

$$p(\bar{x}) = \frac{B a}{\pi}\sqrt{1 - \bar{x}^2} \tag{36}$$

und aus (35)

$$(\sigma_x)_{y=0} = \pm \frac{2}{\pi}\mu_0 a B \begin{cases} \bar{x} \mp \dfrac{\sqrt{1-\bar{x}^2}}{2\mu_0} & \text{für } \bar{x}^2 < 1\,, \\ \bar{x} - \dfrac{\bar{x}}{|\bar{x}|}\sqrt{\bar{x}^2 - 1} & \text{für } \bar{x}^2 > 1\,. \end{cases} \tag{37}$$

Die Formeln (36) und (37) findet man auch sonst.[2]

In Abb. 5 ist der Verlauf der mit der Bezugsspannung $p_0 = \sqrt{P E (1/r_1 + 1/r_2)}$ dimensionslos gemachten Druckspannung $p(\bar{x})$ für die in Tabelle 1 zusammengestellten Fälle a bis d aufgetragen und zwar unter Zugrundelegung eines Reibungskoeffizienten von $\mu_0 = 1$. Die Kurve *b* gilt dann, wenn beide Walzen aus demselben Material bestehen. Die Kurven *a* und *c* beziehen sich dagegen auf den Fall, daß eine der beiden Walzen starr ist ($C = \pm \pi/2$). Zum Vergleich hierzu ist die Kurve *d* eingetragen; sie wurde für $C = \pm \pi/2$ bei Voraussetzung der *Hertz*schen Druckverteilung, welche sich für $C \neq 0$ nur im reibungsfreien Fall ($\mu_0 = 0$) einstellt, errechnet. Da die Konstante C im Bereich $-\pi/2 \leqq C \leqq \pi/2$ liegt und μ_0 in der Praxis stets kleiner als 1 ist, stellen die Kurven *a* und *c* praktisch kaum erreichbare Grenzkurven dar. In Wirklichkeit wird daher meist nur eine geringfügige Abweichung von dem Spannungsverlauf, der sich unter Zugrundelegung der *Hertz*schen Druckverteilung ergibt, vorhanden sein. Jedenfalls bleibt die Größe des sich im allgemeinen etwas aus der Mitte verlagernden Druckmaximums in guter Näherung unverändert (vgl. die Extremkurven *a* und *c* mit *d*).

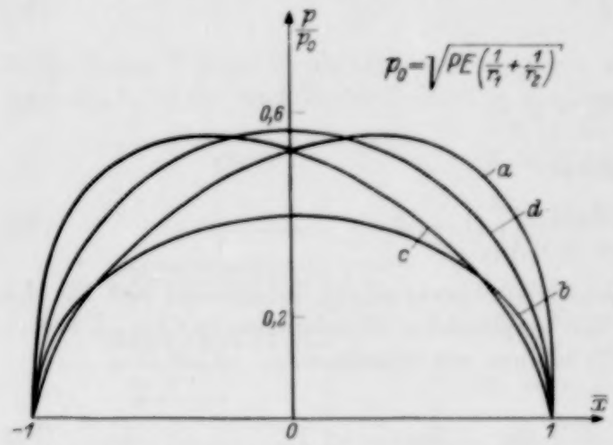

Abb. 5. Verlauf des Drucks p in der Berührungszone für die in Tabelle 1 angegebenen Fälle a bis d bei vollständigem Gleiten (Belastung nach Abb. 1b oder 1c).

Tabelle 1. *Zusammenstellung einiger Spezialfälle.*

Fall	E_1	E_2	ν_1	ν_2	μ_0	C	ϑ	β
a	E	∞	0	0	1	$-\frac{\pi}{2}$	0,35	—0,175
b	E	E			1	0	0,50	0
c	∞	E			1	$\frac{\pi}{2}$	0,65	0,175
d	E (bzw. ∞)	∞ (bzw. E)			0	$\pm\frac{\pi}{2}$	0,50	

[1] Die mit einem Stern gekennzeichneten Gleichungsnummern beziehen sich auf den Anhang.
[2] Siehe Fußnoten 2 und 3 von Seite 138.

Abb. 6 zeigt schließlich die tangentiale Randspannung $(\sigma_x)_{y=0}$ im Rad 2 für die oben diskutierten Fälle a, b und c.

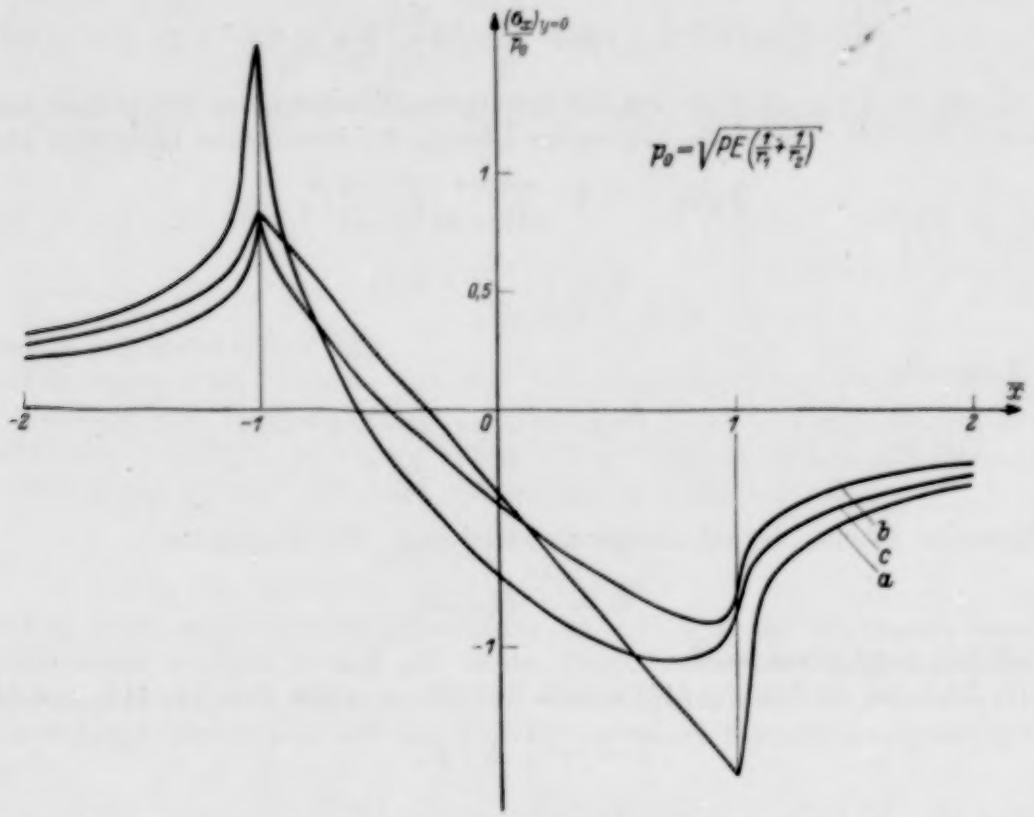

Abb. 6. Verlauf der tangentialen Randspannung $(\sigma_x)_{y=0}$ im Rad 2 für die Fälle a, b und c bei vollständigem Gleiten (Belastung nach Abb. 1b oder 1c).

6. Der Haftfall. Im Haftfall müssen die Berühr- und die Haftbedingung entsprechend (20) und (24) erfüllt werden:

$$\oint_{-1}^{+1} \frac{p(\bar{u})}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u} - C\,q(\bar{x}) = B\,a\,(\bar{x}_0+\bar{x})\,, \qquad \oint_{-1}^{+1} \frac{q(\bar{u})}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u} + C\,p(x) = S^* \qquad \text{für } \bar{x}^2 < 1$$

Diese beiden gekoppelten Integralgleichungen für p und q lassen sich auf eine singuläre Integralgleichung 2. Art für die Funktion

$$F(\bar{x}) = p(\bar{x}) + i\,q(\bar{x}) \tag{38}$$

zurückführen:

$$F(\bar{x}) - \frac{i}{C}\oint_{-1}^{+1} \frac{F(\bar{u})}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u} = \frac{S^*}{C} - \frac{i}{C}\,B\,a\,(\bar{x}_0+\bar{x}) \qquad \text{für } \bar{x}^2 < 1\,. \tag{39}$$

Gleichung (39) ist vom Typ

$$F(\bar{x}) + \frac{\lambda}{\pi}\oint_{-1}^{+1} \frac{F(\bar{u})}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u} = G(\bar{x}) \qquad \text{für } \bar{x}^2 < 1\,. \tag{40}$$

H. Söhngen[1] gibt dafür eine strenge Lösung in geschlossener Form an.
Zunächst bekommt man durch Koeffizientenvergleich

$$\lambda = -\,i\,\frac{\pi}{C} \tag{41}$$

mit $|\pi/C| \geqq 2$ wegen (22) und

$$G(\bar{x}) = G_0 + G_1\,\bar{x} = \frac{S^*}{C} - i\,\frac{B\,a}{C}\,\bar{x}_0 - i\,\frac{B\,a}{C}\,\bar{x}\,. \tag{42}$$

[1] *H. Söhngen*, Math. Z. 60, (1954) S. 31.

Nach Satz 7 der Arbeit von *Söhngen* gilt: Ist $G(\bar{x})$ in $(-1, 1)$ eine Funktion der Klasse L^p $(p > 1)$ und werden solche Lösungen von (40) gesucht, die in $(-1, 1)$ einer Klasse $L^q (q > 1)$ angehören, so gilt, wenn für $\lambda \neq \pm i$

$$\frac{1 - i\lambda}{1 + i\lambda} = e^{i 2\pi\alpha} \qquad \text{mit} \qquad -1 < \Re\,\alpha \leqq 0 \tag{43}$$

ist: Ist $\lambda = i\lambda_1$ mit $-1 \leqq \lambda_1 \leqq 1$, so hat die homogene Gleichung nur die triviale Lösung. Liegt λ nicht in diesem Bereich, so wird die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$F_0(\bar{x}) = -C \frac{\sin\pi\alpha}{\pi(1-\bar{x})}\left(\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}\right)^{\alpha}, \tag{44}$$

wobei

$$C = \int_{-1}^{+1} F(\bar{x})\, d\bar{x},$$

ist, und der Ausdruck

$$F(\bar{x}) = \frac{G(x)}{1+\lambda^2} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{+1} \frac{1-\bar{u}}{1-\bar{x}}\left(\frac{1-\bar{u}}{1+\bar{u}}\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}\right)^{\alpha}\frac{G(\bar{u})}{x-\bar{u}}\, d\bar{u} + F_0(x) \tag{45}$$

liefert die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung. Die Konstante

$$C = \int_{-1}^{+1} F(\bar{x})\, d\bar{x} \tag{46}$$

kann dabei beliebig vorgegeben werden.

Da $|\pi/C| \geqq 2$ ist, ist die Lösung (45) zuständig. Für α ergibt sich aus (43) und (41)

$$\alpha = -\frac{1}{2} + i\beta, \tag{47}$$

wobei

$$e^{2\pi\beta} = \frac{\frac{\pi}{C} + 1}{\frac{\pi}{C} - 1} \tag{48}$$

ist. Die Konstante C errechnet sich nach (46) und (38) zu

$$C = \int_{-1}^{+1} F(x)\, dx = \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} (p + i\,q)\, dx = \frac{1}{a}(P + i\,Q). \tag{49}$$

Hierbei bedeuten P und Q die Normal- und Schubkraft je Walzendicke.

Für die Funktion $F(x)$ erhalten wir zunächst nach (45) mit Berücksichtigung von (44) und (49) sowie (42):

$$F(\bar{x}) = \frac{G(\bar{x})}{1+\lambda^2} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\frac{1}{\pi}\left(\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}\right)^{\alpha}\frac{1}{1-\bar{x}}\{G_0[J_1 + (1-x)J_3] + G_1[J_2 - (1-\bar{x})J_1 + (1-\bar{x})\,\bar{x}\,J_3]\}$$
$$-\left(\frac{P}{a} + i\frac{Q}{a}\right)\frac{\sin\pi\alpha}{\pi(1-\bar{x})}\left(\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}\right)^{\alpha}. \tag{50}$$

In (50) bedeuten J_1, J_2 und J_3 die im Anhang angegebenen Integrale (4*), (5*) und (6*). Beachtet man die Beziehungen (47) und (48), so wird im einzelnen

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= (1 - i\,2\beta)\sqrt{\pi^2 - C^2}, \\ J_2 &= \left(\frac{1}{2} - 2\beta^2 + i\,2\beta\right)\sqrt{\pi^2 - C^2}, \\ J_3 &= -\sqrt{\pi^2 - C^2} + i\,C\left(\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}\right)^{-\frac{1}{2}+i\beta} \qquad (\text{für } \bar{x}^2 < 1). \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Die allgemeine Lösung für $F(\bar{x})$ lautet dann wegen (50), (51), (41) und (42)

$$F(\bar{x}) = p + i\,q = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - C^2}}\frac{\left(\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}\right)^{i\beta}}{\sqrt{1-\bar{x}^2}}\left\{\left[\frac{Ba}{2}(1 + 4\beta^2) - 2S^*\beta + \frac{P}{a} - Ba\,\bar{x}_0\,\bar{x} - Ba\,\bar{x}^2\right]\right.$$
$$\left. + i\left[\frac{Q}{a} + 2\,Ba\,\bar{x}_0\beta + (2\,Ba\,\beta - S^*)\,\bar{x}\right]\right\}. \tag{52}$$

Vor der allgemeinen Diskussion dieser Gleichung sei noch auf den Spezialfall gleicher elastischer Konstanten der beiden Walzen eingegangen. Wegen $C = 0$ (d. h. $\beta = 0$) geht (52) über in

$$F(\bar{x}) = p + i\,q = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1-\bar{x}^2}}\left\{\left[\frac{P}{a} + \frac{B\,a}{2} - B\,a\,\bar{x}_0\,\bar{x} - B\,a\,\bar{x}^2\right] + i\left[\frac{Q}{a} - S^*\,\bar{x}\right]\right\}. \tag{53}$$

Die Forderung, daß bei $\bar{x} = \pm 1$ der Druck p verschwinden muß (Randbedingungen), verlangt:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_0 &= 0 \qquad \text{und} \qquad a = \sqrt{\frac{2\,P}{B}}\,, \\ \text{woraus} \qquad p(\bar{x}) &= \frac{B\,a}{\pi}\sqrt{1-\bar{x}^2} \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

als die *Hertz*sche Druckverteilung folgt.

Die Schubspannung q sei zunächst für den Fall untersucht, daß kein Rollen stattfindet, sondern bei vollkommener Haftung auf die mit der Kraft P bereits zusammengedrückten Walzen die Querkraft Q wirkt [Fall II, A, a)]. Da unter diesen Umständen keine Relativdehnung $(\varepsilon_{x_2} - \varepsilon_{x_1})_{y=0}$ möglich ist, folgt wegen (23) $S^* = 0$, und wir bekommen damit aus (53)

$$q(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{Q}{a}\,\frac{1}{\sqrt{1-\bar{x}^2}}\,. \tag{55}$$

Diese Verteilung wäre wegen der Singularitäten bei $\bar{x} = \pm 1$ nur bei einem unendlich großen Reibungskoeffizienten möglich, so daß sich in der Praxis neben einem mittleren Haftgebiet zwei seitliche Gleitzonen ausbilden. Falls die beiden Walzen jedoch aufeinander abrollen [Fall III, A, a)], ist ein Schlupf vorhanden, der im Haftfall ein reiner Formänderungsschlupf ist. Wegen (53) gilt hier

$$q(\bar{x}) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\dfrac{Q}{a} - S^*\,\bar{x}}{\sqrt{1-\bar{x}^2}}\,.$$

Fordert man, daß auf der Anlaufseite (unter Zugrundelegung des Rades 2 als Antriebsrad entsprechend Abb. 1c), also bei $\bar{x} = 1$, die Schubspannung null wird, so ergibt sich

$$S^* = \frac{Q}{a}$$

und

$$q(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{Q}{a}\sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}} \tag{56}$$

in Übereinstimmung mit der von *L. Föppl*[1] angegebenen Formel.

Wir wollen uns nun dem Fall verschiedener elastischer Konstanten der beiden Walzen zuwenden und untersuchen, bei welchen Bedingungen hier Lösungen möglich sind. Aus physikalischen Gründen müssen wir fordern, daß bei $\bar{x} = \pm 1$ der Druck null werden muß (Randbedingungen). Wegen (52) ist dies jedoch nur möglich, wenn

$$B\,a\,\bar{x}_0 = 0\,, \tag{a}$$

$$\frac{B\,a}{2}(1 + 4\,\beta^2) - 2\,S^*\,\beta + \frac{P}{a} = B\,a\,, \tag{b}$$

$$\frac{Q}{a} + 2\,B\,a\,\bar{x}_0\,\beta = 0\,, \tag{c}$$

$$2\,B\,a\,\beta - S^* = 0\,. \tag{d}$$

Aus den Bedingungen (a) bis (d) erhält man

$$\bar{x}_0 = 0\,, \qquad Q = 0\,, \qquad S^* = 2\,B\,a\,\beta\,, \qquad P = \frac{B\,a^2}{2}(1 + 4\,\beta^2)\,. \tag{57}$$

Dieses Ergebnis besagt, daß bei vollkommenem Haften und unter Voraussetzung eines konstanten Schlupfes die Randbedingungen nur dann erfüllbar sind, falls keine Querkraft wirkt [Fall I, B, a)]. Die halbe Breite der Berührungszone ergibt sich aus (57) zu

$$a = \sqrt{\frac{2\,P}{(1 + 4\,\beta^2)\,B}}\,, \tag{58}$$

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 137; (dort S. 11).

und für die Druck- und Schubspannungsverteilung erhält man wegen (52) mit (57) die Formeln

$$p(\bar{x}) = \frac{B\,a}{\sqrt{\pi^2 - C^2}} \sqrt{1-\bar{x}^2} \cos\left[\beta \ln\left(\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}\right)\right], \tag{59}$$

$$q(\bar{x}) = \frac{B\,a}{\sqrt{\pi^2 - C^2}} \sqrt{1-\bar{x}^2} \sin\left[\beta \ln\left(\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}\right)\right]. \tag{60}$$

Die Übertragung einer Normal- und Querkraft [Fälle II, B, a) und III, B, a)] ist also bei vollkommener Haftung für verschiedene elastische Konstanten der Walzen nicht möglich, selbst wenn man einen unendlich großen Reibungskoeffizienten voraussetzt. Der Grund hierfür liegt darin, daß die Übertragung einer Querkraft auf unendlich große Druckspannungen an den Ecken führen würde, was mit den Randbedingungen nicht verträglich ist[1].

Wie aus (59) und (60) hervorgeht, wechseln p und q in unmittelbarer Nähe der Ecken $\bar{x} = \pm 1$ theoretisch unendlich oft das Vorzeichen. Der oszillierende Spannungsverlauf kann durch die wechselseitige Beeinflussung von p und q erklärt werden und beruht auf der Voraussetzung eines konstanten Schlupfes. Da jedoch längs der Berührungsfläche kein Zug übertragbar ist, folgt daraus, daß diese Voraussetzung nicht korrekt erfüllt ist. Nach (59) und (60) liegt die erste Nullstelle von p im Falle $C = \pi/2$ bei

$$\bar{x} = \pm\left[1 - 2\,e^{-\frac{\pi}{2\beta}}\right] = \pm\,[1 - 2{,}5 \cdot 10^{-4}],$$

also praktisch bei $\bar{x} = \pm 1$, so daß das sinusartige Verhalten auf die unmittelbare Umgebung der Eckpunkte, wo p und q fast schon auf den Wert null abgesunken sind, beschränkt ist. Das erste negative Maximum von p tritt für $C = \pi/2$ bei $\bar{x} = \pm\,[1 - 3{,}7 \cdot 10^{-5}]$ auf und beträgt, wie eine einfache Rechnung zeigt, weniger als 1% des Drucks bei $\bar{x} = 0$. Aus diesen Gründen kann man sagen, daß die Gleichungen (59) und (60) trotzdem brauchbare Lösungen für den Fall I, B, a) darstellen.

Im folgenden soll der Verlauf der tangentialen Randspannung $(\sigma_x)_{y=0}$ berechnet werden. Dafür gelten die Gleichungen (33) und (34). Wir gehen zweckmäßig von der aus (52) mit (57) folgenden komplexen Funktion

$$F(\bar{x}) = \frac{B\,a}{\sqrt{\pi^2 - C^2}} \sqrt{1-\bar{x}^2} \left(\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}\right)^{i\beta} \tag{61}$$

aus, welche für den betrachteten Fall zuständig ist, und bilden zunächst

$$\oint_{-1}^{+1} \frac{F(\bar{u})}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u} = \frac{B\,a}{\sqrt{\pi^2 - C^2}} \oint_{-1}^{+1} \frac{\left(\frac{1+\bar{u}}{1-\bar{u}}\right)^{i\beta} \sqrt{1-\bar{u}^2}}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u}. \tag{62}$$

Die Lösung für das vorstehende Integral findet man im Anhang, Gleichung (7*). Setzt man dort $\alpha = -i\beta$ und beachtet die Beziehung (48), so folgt

$$J_4 = -\sqrt{\pi^2 - C^2}\,(1 - i\,2\beta) + \sqrt{\pi^2 - C^2} \begin{cases} 1 + \bar{x} - i\,\dfrac{C}{\sqrt{\pi^2 - C^2}} \sqrt{1-\bar{x}^2} \left(\dfrac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}\right)^{-i\beta} & \text{für } \bar{x}^2 < 1, \\ 1 + \bar{x} - \dfrac{\bar{x}}{|\bar{x}|} \sqrt{\bar{x}^2 - 1} \left(\dfrac{\bar{x}-1}{\bar{x}+1}\right)^{-i\beta} & \text{für } \bar{x}^2 > 1, \end{cases}$$

und man erhält für den Imaginärteil von (62)

$$\begin{aligned} \Im &= \oint_{-1}^{+1} \frac{F(\bar{u})}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u} = \oint_{-1}^{+1} \frac{q(\bar{u})}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u} \\ &= B\,a \left[2\beta - \begin{cases} \dfrac{C}{\sqrt{\pi^2 - C^2}} \sqrt{1-\bar{x}^2} \cos\left[\beta \ln\left(\dfrac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}\right)\right] & \text{für } \bar{x}^2 < 1, \\ \dfrac{\bar{x}}{|\bar{x}|} \sqrt{\bar{x}^2 - 1} \sin\left[\beta \ln\left(\dfrac{\bar{x}+1}{\bar{x}-1}\right)\right] & \text{für } \bar{x}^2 > 1. \end{cases} \right] \end{aligned} \tag{63}$$

Nach Einsetzen von (63) in (33) und (34) unter Berücksichtigung von (59) ergeben sich die Formeln

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x)_{y=0} &= \pm\frac{4}{\pi} B\,a\,\beta + p(\bar{x}) \left(\mp\frac{2}{\pi} C - 1\right) && \text{für } \bar{x}^2 < 1, \\ (\sigma_x)_{y=0} &= \pm\frac{2}{\pi} B\,a \left\{ 2\beta - \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} \sqrt{\bar{x}^2 - 1} \sin\left[\beta \ln\left(\frac{\bar{x}+1}{\bar{x}-1}\right)\right] \right\} && \text{für } \bar{x}^2 > 1, \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

wobei das obere Vorzeichen für Walze 1, das untere für Walze 2 zuständig ist.

[1] Vgl. hierzu *H. Bufler*, Z. angew. Math. Mech. 39 (1959) S. 218.

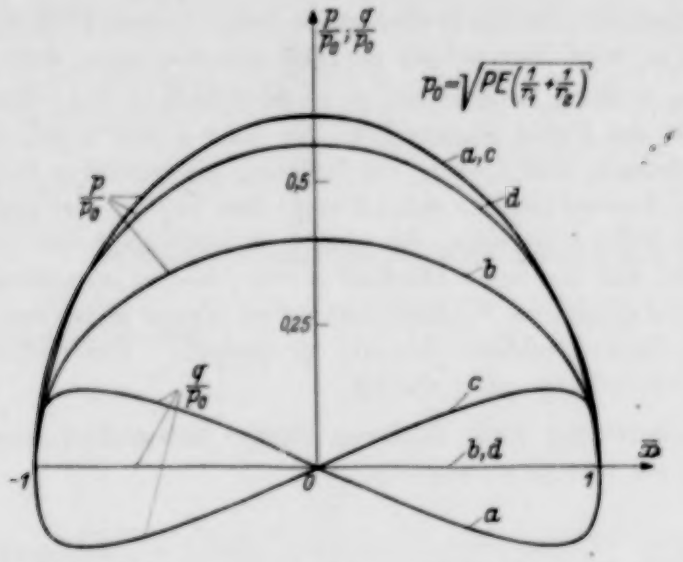

Abb. 7. Druck p und Schubspannung q in der Berührungszone für die Fälle a, b und c bei vollkommenem Haften und für den Fall d bei verschwindender Reibung (Belastung nach Abb. 1a).

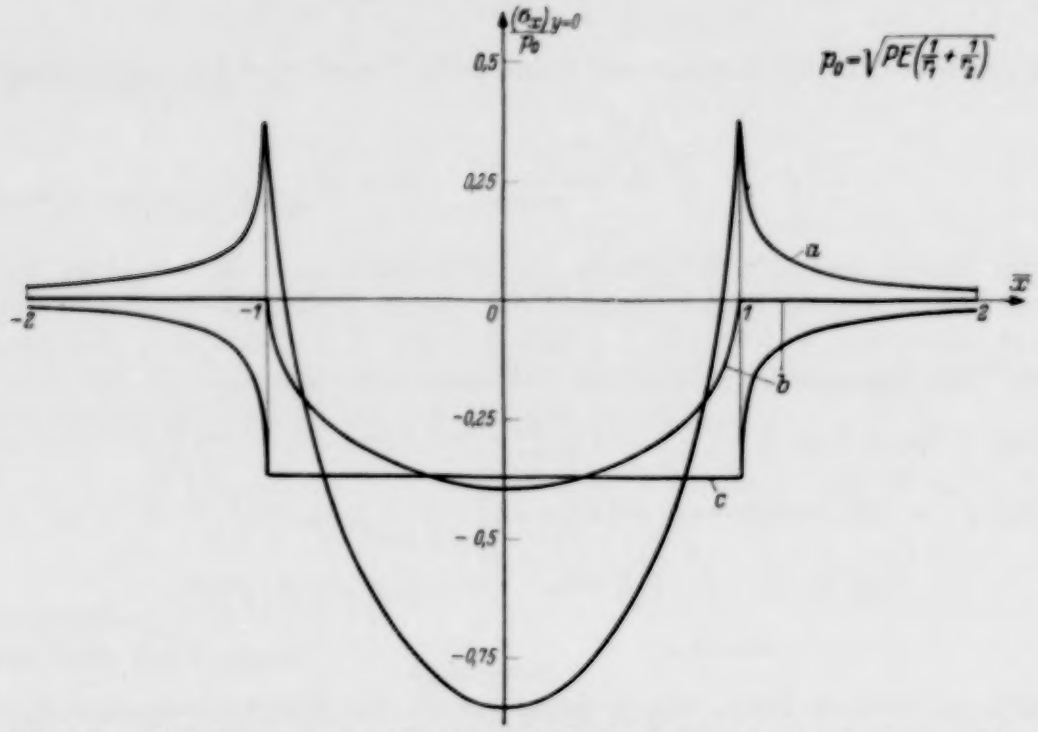

Abb. 8. Tangentiale Randspannung $(\sigma_x)_{y=0}$ im Rad 2 für die Fälle a, b und c bei vollkommenem Haften (Belastung nach Abb. 1a).

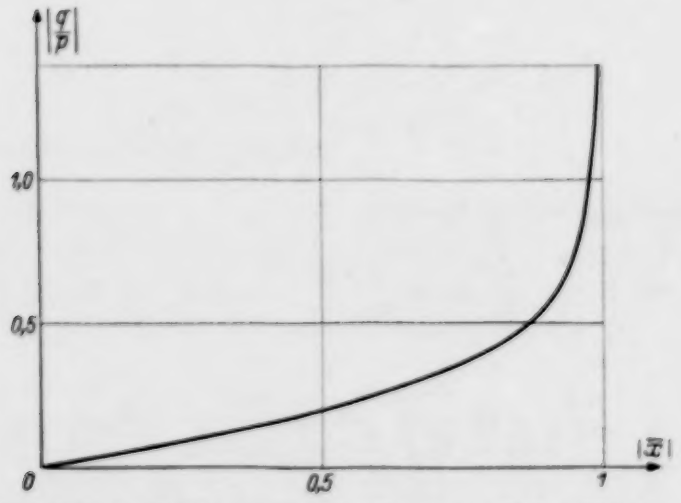

Abb. 9. Verhältnis q/p in der Berührungszone bei vollkommenem Haften (Belastung nach Abb. 1a).

Abb. 7 zeigt den Verlauf der für die früher schon betrachteten Fälle a, b und c (siehe Tabelle 1; der Reibungskoeffizient μ_0 wird hier jedoch so groß angenommen, daß kein Gleiten möglich ist) berechneten Spannungen p und q, welche mit $p_0 = \sqrt{P E (1/r_1 + 1/r_2)}$ dimensionslos gemacht sind. Zum Vergleich hierzu ist der Fall d eingetragen, der statt a und c gilt, wenn keine Reibung vorhanden ist. Man sieht daraus, daß infolge der Reibung ein größeres Druckmaximum auftritt als sich nach der *Hertz*schen Formel ergibt. Abb. 8 zeigt den Verlauf der tangentialen Randspannung $(\sigma_x)_{y=0}$ im Rad 2 für die Fälle a, b und c. In Abb. 9 ist schließlich das Verhältnis p/q aufgetragen, und man erkennt daraus, daß der reine Haftfall nur bei einem unendlich großen Reibungskoeffizienten möglich wäre, so daß sich in Wirklichkeit neben einem mittleren Haftgebiet zwei seitliche Gleitzonen bilden. Auf dieses Problem, das eine gesonderte Untersuchung erfordert, soll jedoch an dieser Stelle nicht mehr eingegangen werden.

7. Anhang: Zusammenstellung und Ableitung einiger Integralformeln. Aus einer Arbeit von *H. Söhngen*[1] entnehmen wir folgende Formeln:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{s z}}{(1+e^z)^n}\,dz = (-1)^{n-1}\binom{s-1}{n-1}\frac{1}{\sin\pi s} \qquad (0<\Re\, s<n\,,\ n \text{ ganzzahlig und positiv})\,, \tag{1*}$$

$$\frac{1}{\pi}\oint_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(1-s)z}}{e^z-e^{\xi}}\,dz = e^{-s\xi}\operatorname{ctg}\pi s \qquad (0<\Re\, s<1)\,. \tag{2*}$$

Hierbei kann s reell oder komplex sein; z und ξ sind reell. Ferner wird das anschließend abgeleitete Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(1-s)z}}{e^z+e^{\xi}}\,dz = \frac{e^{-s\xi}}{\sin\pi s} \qquad (0<\Re\, s<1) \tag{3*}$$

benötigt. Zum Beweis von (3*) betrachten wir vorübergehend z als komplexe Veränderliche. Der Integrand $f(z) = h(z)/g(z)$ besitzt dann in der oberen Halbebene Pole erster Ordnung bei $z_n = \xi + i\pi(1+2n)$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$, falls $0 < \Re\, s < 1$. Nach dem Residuensatz wird, wenn sich das Umlaufintegral über die obere Halbebene erstreckt,

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \sum \text{Res} = 2\pi i \sum\left(\frac{h(z)}{g'(z)}\right)_{z_n} = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} e^{-s z_n} = 2\pi i\, e^{-s(\xi+i\pi)}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-i2\pi s n} = \frac{\pi}{\sin\pi s}e^{-s\xi}.$$

Durch Aufteilung des Integrationswegs erhält man

$$\oint f(z)\,dz = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz}_{\text{reelle Achse}} + \underbrace{\int_{0}^{\pi} f(R e^{i\varphi})\, R i e^{i\varphi}\,d\varphi}_{\substack{R\to\infty \\ \text{Halbkreisbogen}}}.$$

Wie man leicht nachweisen kann, verschwindet jedoch der Halbkreisbogenanteil, womit (3*) bewiesen ist.

Sämtliche weitere benötigte Integrale lassen sich auf die Grundformen (1*), (2*) und (3*) zurückführen. Mittels der Substitution

$$\bar{u} = \frac{e^z - 1}{e^z + 1}$$

wird

$$\int_{-1}^{+1}\left(\frac{1-\bar{u}}{1+\bar{u}}\right)^{\alpha} d\bar{u} = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{z(1-\alpha)}}{(e^z+1)^2}\,dz\,,$$

und es folgt durch Anwendung von (1*)

$$J_1 = \int_{-1}^{+1}\left(\frac{1-\bar{u}}{1+\bar{u}}\right)^{\alpha} d\bar{u} = \frac{2\pi\alpha}{\sin\pi\alpha} \qquad (-1<\Re\,\alpha<1)\,. \tag{4*}$$

Ebenso erhält man

$$\int_{-1}^{+1}\left(\frac{1-\bar{u}}{1+\bar{u}}\right)^{\alpha}\bar{u}\,d\bar{u} = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{z(2-\alpha)}}{(e^z+1)^3}\,dz - 2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{z(1-\alpha)}}{(e^z+1)^3}\,dz$$

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 145; (dort Gleichungen (19) und (20)).

und nach Verwendung von (1*)

$$J_2 = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1-\bar{u}}{1+\bar{u}}\right)^{\alpha} \bar{u}\, d\bar{u} = -\frac{2\pi\alpha^2}{\sin\pi\alpha} \qquad (-1 < \Re\alpha < 1). \tag{5*}$$

Beim Integral $J_3 = \oint_{-1}^{+1} \frac{\left(\frac{1-\bar{u}}{1+\bar{u}}\right)^{\alpha}}{\bar{x}-\bar{u}}\, d\bar{u}$ hat man zwischen den Fällen $\bar{x}^2 < 1$ und $\bar{x}^2 > 1$ zu unterscheiden[1].

Im Fall $\bar{x}^2 < 1$ substituieren wir mit

$$\bar{u} = \frac{e^z - 1}{e^z + 1}, \qquad \bar{x} = \frac{e^\xi - 1}{e^\xi + 1} \tag{a}$$

und bekommen zunächst

$$J_3 = -(1 + e^\xi) \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{z(1-\alpha)}}{(e^z+1)(e^z - e^\xi)}\, dz.$$

Nach Partialbruchzerlegung des Integranden folgt

$$J_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{z(1-\alpha)}}{e^z+1}\, dz - \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{z(1-\alpha)}}{e^z - e^\xi}\, dz. \tag{b}$$

Im Fall $\bar{x}^2 > 1$ schreiben wir

$$\bar{u} = \frac{e^z - 1}{e^z + 1}, \qquad \bar{x} = \frac{e^\xi + 1}{e^\xi - 1} \tag{c}$$

und man erhält in analoger Weise

$$J_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{z(1-\alpha)}}{e^z+1}\, dz - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{z(1-\alpha)}}{e^z + e^\xi}\, dz. \tag{d}$$

Wendet man auf die unter (b) und (d) stehenden Integrale die Formeln (1*), (2*) und (3*) an, so ergibt sich schließlich bei Beachtung von (a) bzw. (c)

$$J_3 = \oint_{-1}^{+1} \frac{\left(\frac{1-\bar{u}}{1+\bar{u}}\right)^{\alpha}}{\bar{x}-\bar{u}}\, d\bar{u} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha} \begin{cases} 1 - \left(\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}\right)^{\alpha} \cos\pi\alpha & \text{für } \bar{x}^2 < 1, \\ 1 - \left(\frac{\bar{x}-1}{\bar{x}+1}\right)^{\alpha} & \text{für } \bar{x}^2 > 1 \end{cases} \tag{6*}$$

mit der Einschränkung $0 < \Re\alpha < 1$.

Es soll nun noch das Integral

$$J_4 = \oint_{-1}^{+1} \left(\frac{1-\bar{u}}{1+\bar{u}}\right)^{\alpha} \frac{\sqrt{1-\bar{u}^2}}{\bar{x}-\bar{u}}\, d\bar{u}$$

ausgewertet werden[2].

Im Fall $\bar{x}^2 < 1$ wird mittels der Substitution (a)

$$J_4 = -2(1 + e^\xi) \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{z(3/2-\alpha)}}{(e^z-1)^2 (e^z - e^\xi)}\, dz$$

und nach Partialbruchzerlegung des Integranden

$$J_4 = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{z(1/2-\alpha)}}{(e^z+1)^2}\, dz + 2\frac{e^\xi}{1+e^\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{z(1/2-\alpha)}}{e^z+1}\, dz - \frac{2e^\xi}{1+e^\xi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{z(1/2-\alpha)}}{e^z - e^\xi}\, dz. \tag{e}$$

Im Falle $\bar{x}^2 > 1$ erhalten wir mit (c) auf entsprechende Weise

$$J_4 = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{z(1/2-\alpha)}}{(e^z+1)^2}\, dz - \frac{2e^\xi}{1-e^\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{z(1/2-\alpha)}}{e^z+1}\, dz + \frac{2e^\xi}{1-e^\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{z(1/2-\alpha)}}{e^z + e^\xi}\, dz. \tag{f}$$

[1] Nur für $x^2 < 1$ ist J_3 ein uneigentliches Integral.
[2] Nur für $x^2 < 1$ ist J_4 ein uneigentliches Integral.

Die unter (e) und (f) stehenden Integrale lassen sich mit Hilfe von (1*), (2*) und (3*) berechnen. Es folgt

$$J_4 = -\frac{2\pi}{\cos\pi\alpha}\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) + \frac{2\pi}{\cos\pi\alpha}\begin{cases}\dfrac{e^{\xi}}{1+e^{\xi}}\left[1+\sin\pi\alpha\, e^{-\xi(1/2+\alpha)}\right] & \text{für } \bar{x}^2<1\,,\\[2ex] \dfrac{e^{\xi}}{1-e^{\xi}}\left[-1+e^{-\xi(1/2+\alpha)}\right] & \text{für } \bar{x}^2>1\,.\end{cases}$$

Beachtet man nun, daß wegen (a) bzw. (c)

für $\bar{x}^2<1$

$$\frac{e^{\xi}}{1+e^{\xi}} = \frac{1+\bar{x}}{2}\,, \qquad \frac{e^{\xi/2}}{1+e^{\xi}} = \frac{\sqrt{1-\bar{x}^2}}{2}$$

und für $\bar{x}^2>1$

$$\frac{e^{\xi}}{1-e^{\xi}} = -\frac{1+\bar{x}}{2}\,, \qquad \frac{e^{\xi/2}}{1-e^{\xi}} = -\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|}\frac{\sqrt{\bar{x}^2-1}}{2}\,,$$

so erhält man:

$$J_4 = \oint_{-1}^{+1}\left(\frac{1-\bar{u}}{1+\bar{u}}\right)^{\alpha}\frac{\sqrt{1-\bar{u}^2}}{\bar{x}-\bar{u}}\,d\bar{u} = -\frac{\pi}{\cos\pi\alpha}(1+2\alpha)$$

$$+\frac{\pi}{\cos\pi\alpha}\begin{cases}1+\bar{x}+\sqrt{1-\bar{x}^2}\left(\dfrac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}\right)^{\alpha}\sin\pi\alpha & \text{für } \bar{x}^2<1\,,\\[2ex] 1+\bar{x}-\dfrac{\bar{x}}{|x|}\sqrt{\bar{x}^2-1}\left(\dfrac{x-1}{\bar{x}+1}\right)^{\alpha} & \text{für } \bar{x}^2>1\end{cases} \qquad (7^*)$$

mit der Einschränkung $-\frac{1}{2} < \Re\,\alpha < \frac{1}{2}$.

8. Zusammenfassung. Nach einer Übersicht der mit der rollenden Reibung zusammenhängenden Probleme werden für verschiedene elastische Konstanten der beiden Walzen die Berühr- und Haftbedingung sowohl für den ebenen Spannungszustand als auch den ebenen Formänderungszustand exakt abgeleitet. Die das Problem beschreibenden Integralgleichungen für den Druck p und die Schubspannung q innerhalb der Berührungszone führen in den hier allein betrachteten Grenzfällen des vollkommenen Gleitens und vollkommenen Haftens auf geschlossene Lösungen. Außer p und q wird die für die Beurteilung der Beanspruchung wichtige tangentiale Randspannung $(\sigma_x)_{y=0}$ berechnet. Die Ergebnisse werden diskutiert und für die möglichen Extremfälle (eine der beiden Walzen ist starr; beide Walzen bestehen aus demselben Material) in Diagrammen niedergelegt. Es zeigt sich, daß im reinen Gleitfall gegenüber der *Hertz*schen Verteilung im wesentlichen nur eine Verlagerung des Druckmaximums erfolgt, während der reine Haftfall bei der Walzenpressung zu einer Erhöhung des Druckmaximums infolge der Reibung führt.

(Eingegangen am 21. Juli 1958)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Hans Bufler*, München, Techn. Hochschule, Inst. für Techn. Mechanik

Ebenes Hochkantbiegen eines schmalen Balkens unter Berücksichtigung der Verfestigung[1]

Von **Horst Lippmann**

1. Einleitung. Im Gegensatz zur Elastizitätstheorie sind die Grundgleichungen der Plastizitätstheorie bis heute keinesfalls unanfechtbar festgelegt. Selbst unter Voraussetzung eines plastischen Potentials (nach *v. Mises*[2]; vgl. z. B. auch *Hill*[3]) führt die Wahl verschiedenartiger mathematisch zulässiger Formen desselben (wir erwähnen lediglich diejenigen von *Tresca*, *Huber-Mises*[3] und *Coulomb*, vgl. *Shield*[4]) auf z. T. gänzlich verschiedene Ergebnisse. Durchgeführte Versuche sind entweder zu einer endgültigen Entscheidung zu grob oder aber so fein, daß sie ohnehin aus dem Geltungsbereich der phänomenologischen Theorie herausfallen und mit dem physikalischen Modell der Kristallplastizität (vgl. *Kochendörfer*[5], *Kröner*[6], *Lippmann*[7]) erklärt werden müssen, welches seinerseits auf technische Formgebungsverfahren bisher nur in wenigen einfachen Fällen angewandt wurde (*Lippmann*[8]). Es gilt also, den auf technische Belange zugeschnittenen und daher stark vereinfachten Untersuchungen (wir verweisen beim Balkenbiegen z. B. auf die sehr interessante Arbeit von *Hopkins*[9]) theoretisch exakte Analysen bestimmter technischer Formgebungsvorgänge an die Seite zu stellen, die auch in Einzelheiten experimentelle Prüfung zulassen. Während sich idealplastisches Blechbiegen geschlossen durchrechnen läßt[3], mußte zur Berücksichtigung der Verfestigung auf numerische Methoden zurückgegriffen werden (*Proksa*[10]). Beim Hochkantbiegen führt schon der idealplastische Fall auf keine geschlossenen Lösungen. *Gaydon*[11] bediente sich deshalb einer iterativen Näherung für nicht zu große Biegungen. Die vorliegende Untersuchung erweitert *Gaydons* Ergebnisse auf verfestigenden Werkstoff und benutzt hierzu in Abschnitt **4** numerische Verfahren. Abschnitt **3** gibt auf Grund eines einfacheren plastischen Potentials allgemeine Beziehungen für die Geometrie des Vorganges — geschlossene vollständige Integration ist dennoch unmöglich. Man erkennt vielmehr, auf welche verwickelten Ausdrücke selbst vereinfachte Ansätze führen. Zu Beginn formulieren wir in Abschnitt **2** unsere Grundannahmen und Grundansätze. Näherungsbeziehungen für das elastische Werkstoffverhalten finden sich in Abschnitt **5**, während Abschnitt **6** einige grundsätzliche und überraschende Antworten zur Frage der Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen erteilt: Bei gewissen Werkstoffverhältnissen stellt sich eine Unverträglichkeit im wesentlichen zwischen Fließkriterium und den Spannungs-Gleichgewichtsbeziehungen heraus, welche eine Unlösbarkeit der Grundgleichungen bedingt. Zwecks eingehender Analyse erweisen sich die z. T. etwas langatmigen Betrachtungen in **2** b) und **6** b) als unumgänglich.

2. Voraussetzungen und Grundgleichungen. a) Grundannahmen.

Voraussetzung 1: Die plastische Formänderung ist groß gegenüber der elastischen, so daß diese vorerst vernachlässigt wird.

Demnach besteht die Alternative „starr-plastisch". Einflüsse des elastischen Werkstoffverhaltens berücksichtigen wir näherungsweise in Abschnitt **5** (Rückfederung).

Voraussetzung 2: Während des ganzen Biegevorganges besitzt jeder Balkenquerschnitt Q eine Symmetriegerade g derart, daß alle zu den verschiedenen Q gehörigen g in einer Ebene E liegen.

Dies ist die exakte Formulierung für „ebenes Biegen".

[1] Dieser Aufsatz entstand am Lehrstuhl für Mechanik der Technischen Hochschule Hannover (Prof. Dr.-Ing. *E. Pestel*) mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

[2] *R. v. Mises*, Z. angew. Math. Mech. 8 (1928), S. 161.

[3] *R. Hill*, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford 1950.

[4] *R. T. Shield*, J. Mech. Phys. Solids 4 (1955), S. 10.

[5] *A. Kochendörfer*, Plastische Eigenschaften von Kristallen und metallischen Werkstoffen, Berlin 1941.

[6] *E. Kröner*, Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Erg. angew. Math., H. 5. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.

[7] *H. Lippmann*, Acta met. 4 (1956), S. 298.

[8] *H. Lippmann*, Ing.-Archiv 26 (1958), S. 187.

[9] *H. G. Hopkins*, J. Mech. Phys. Solids 4 (1955), S. 38.

[10] *F. Proksa*, Diss. Hannover 1958, Stahlbau 28 (1959), S. 29.

[11] *F. A. Gaydon*, J. Mech. Phys. Solids 1 (1952/53), S. 103.

Voraussetzung 3: Die Belastung des Balkens erfolge lediglich durch an den Endquerschnitten angreifende Momente.

Insbes. sind alle anderen Begrenzungsflächen spannungsfrei. Trägheits- und Schwerekräfte werden vernachlässigt.

Voraussetzung 4: Der Biegevorgang verlaufe in bezug auf Spannungen und Verzerrungen zentralsymmetrisch um eine gewisse (zu E senkrechte, raumfeste oder veränderliche) Achse mit dem Durchstoßpunkt P in E.

Daher schneiden Balkenaußen- und Innenkante E in konzentrischen Kreisbögen mit dem Mittelpunkt P (Abb. 1). Ferner müssen anfänglich ebene Querschnitte eben bleiben, da dies (aus Symmetriegründen) für den durch die Mittelebene PS herausgeschnittenen Querschnitt gilt. Natürlich zeigt sich erst im folgenden, ob das aufzustellende Grundgleichungssystem die Voraussetzungen 2 und 4 gestattet.

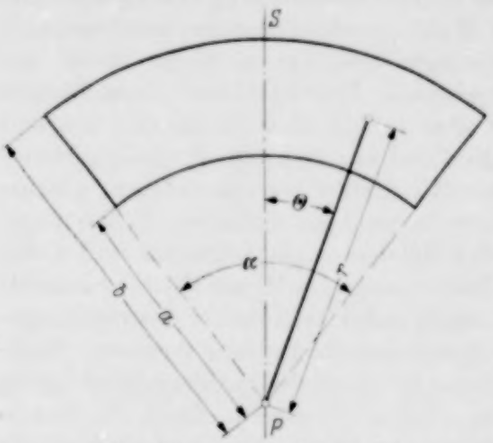

Abb. 1. Schnitt des Balkens mit E.

Voraussetzung 5: Die auf E wirkenden Spannungen sowie ihre räumlichen Ableitungen verschwinden.

In E herrscht „ebener Spannungszustand". Er ist für hinreichend „schmale" Balken (deren Abmessungen senkrecht zu E gering im Vergleich zu den anderen Abmessungen sind) näherungsweise gewährleistet. Dann bleibt aber auch die Querkrümmung der äußeren und inneren Begrenzungsfläche ohne wesentlichen Einfluß:

Voraussetzung 6: Die äußere und die innere Begrenzungsfläche stellen Teile von auf E senkrechten Zylindern dar.

Wir wählen in E ein Polarkoordinatensystem mit dem (ohne Beschränkung der Allgemeinheit raumfest vorausgesetzten) Punkt P als Pol und dem im Uhrzeigersinn positiv gezählten Winkel Θ gegen die (ebenfalls raumfest vorausgesetzte) Richtung PS als Azimutalwinkel. Der Balken besitze die Anfangslänge l; seine Endquerschnitte schließen im betrachteten Augenblick den Winkel α ein (welcher den Biegezustand beschreibt): $-\alpha \leqq \Theta \leqq \alpha$. Alle auf den Anfangszustand $\alpha = \alpha_0$ bezogenen Größen mögen durch den Index 0 gekennzeichnet sein. Wegen Voraussetzung 4 und der Symmetrie um PS bilden die Koordinatenrichtungen Hauptspannungsrichtungen: σ_r, σ_Θ sind Hauptspannungen, ε_r, ε_Θ die zugehörigen Formänderungen. Partielle Ableitungen nach α werden durch Punkte bezeichnet. Ein Volumenelement besitze für $\alpha = \alpha_0$ die Koordinaten $\Theta = \Theta_0$, $r = R_0$. Für $\alpha \geqq \alpha_0$ liegt es bei $\Theta = \Theta_0 \alpha/\alpha_0$, $r = R(R_0, \alpha)$. Es besitzt die Abmessung $h = h(h_0, \alpha)$ senkrecht zu E und die „Radialgeschwindigkeit" $u(R, \alpha) = \dot{R}(R_0, \alpha)$. Wegen des Werkstoffzusammenhaltes fordern wir

Voraussetzung 7: u ist stetig in r sowie überall nach r differentiierbar.

Das letzte gilt, damit $\dot{\varepsilon}_r$ [vgl. später Gleichung (4b)] überall erklärt ist. Es sei $a(\alpha)$ der Halbmesser der inneren, $b(\alpha)$ derjenige der äußeren Balkenkante und $t(\alpha) = b(\alpha) - a(\alpha)$ die Balkendicke, sowie $A(R, \alpha)$ die am Volumenelement $r = R$ bis zur Biegung α geleistete Arbeitsdichte. Soweit im folgenden (formal) benötigt, kennzeichnen wir die (nach Voraussetzung 5 verschwindende) auf E wirkende Normalspannung durch σ_h. Die zugehörige Verzerrungskomponente sei ε_h.

b) **Grundgleichungen.** Die *Mises*sche Theorie[1] des plastischen Potentials besagt die Existenz einer invarianten Funktion $F(\sigma)$ des Spannungstensors σ sowie einer skalaren Funktion $\lambda = \lambda(r, \alpha)$ mit

$$\left.\begin{aligned} F(\sigma) &= k && \text{(Fließkriterium)}, \\ \dot{\varepsilon}_i &= \lambda \frac{\partial}{\partial \sigma_i} F(\sigma) && \text{(Stoffgesetz; } i = r, \Theta, h), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wobei das Stoffgesetz überall dort gilt, wo die rechte Seite sinnvoll ist. Die sog. Fließgrenze $k = k(A)$ hängt stetig von der am betrachteten Volumenelement geleisteten Arbeitsdichte $A(r, \alpha)$ ab (vgl. *Hill*[2], Abschnitt II.3).

[1] Siehe Fußnote 2 auf Seite 153.
[2] Siehe Fußnote 3 auf Seite 153.

Wegen der Vernachlässigung von Volumenkräften und wegen Voraussetzung 5 lautet die einzige Bedingung für das Spannungsgleichgewicht in E [siehe z. B. *Szabó*[1], Gleichung (11.1)]

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\,\sigma_r) = \sigma_\Theta\,. \tag{2a}$$

Aus den Randbedingungen $\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0$ folgt

$$\int_a^b \sigma_\Theta\,dr = 0\,.$$

Setzen wir

$$K_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i\,dh \quad (i = r, \Theta)\,,$$

so gibt $\int_a^b K_\Theta\,dr$ die auf Q wirkende Normalkraft, welche wegen Voraussetzung 3 verschwinden muß. Da die σ_i nur in E bekannt sind, liegt es nahe, $K_i = \text{konst.}\,\sigma_i$ zu setzen, wodurch wegen (2a)

$$K = \int_a^b K_\Theta\,dr = 0$$

gewährleistet wird. Allgemein könnte man K_i für den Fall $K \neq 0$ und $\sigma_\Theta = \text{konst.}$ ebenso ausdrücken. Es folgt

$$K = \sigma_\Theta\,|Q| = \sigma_\Theta \int_a^b h\,dr\,,$$

also (auch im betrachteten Grenzfall $K = 0$)

$$K_i = \frac{\int_a^b h\,dr}{b-a}\,\sigma_i\,. \tag{2b}$$

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, (2a) für die K_i niederzuschreiben (was exakt ist und $K = 0$ gewährleistet), dann aber für die σ_i mittlere Spannungen K_i/h zu benutzen. Dies bevorzugt z. B. *Gaydon*[2]; auch wir werden zum Vergleich mit seinen Ergebnissen i. a. auf diese Weise rechnen. Statt (2a) erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\,h\,\sigma_r) = h\,\sigma_\Theta\,. \tag{3}$$

Anders geschrieben, lauten (2a) bzw. (3)

$$\frac{\partial}{\partial r}\sigma_r = \frac{1}{r}\,[\sigma_\Theta - \sigma_r]\,, \tag{2'}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(h\,\sigma_r) = \frac{1}{r}\,[h\,\sigma_\Theta - h\,\sigma_r]\,. \tag{3'}$$

Aus Gründen des Kräftegleichgewichtes in radialer Richtung verlangen wir überall

Voraussetzung 8: Je nachdem, ob wir die linke oder die rechte Seite von (2′/3′) benutzen, sei σ_r bzw. $h\,\sigma_r$ stetig.

Jedoch sind im folgenden Unstetigkeiten von σ_Θ zugelassen. Daher möge (2′/3′) präzisiert werden: Überall, wo die rechte Seite der Gleichungen stetig ist, möge die linke sinnvoll sein sowie (2′/3′) erfüllen und umgekehrt.

In Anlehnung an *Gaydon* setzen wir näherungsweise

$$\dot{\varepsilon}_h = \frac{\dot{h}}{h}\,. \tag{4a}$$

Da während der Verformung ebene Querschnitte in ebensolche übergehen, ist die tangentielle Verschiebung bei Änderung von α um $d\alpha$ von der Gestalt $dv = r\,f(\alpha, \Theta)\,d\alpha$. Z. B. bei *Sommerfeld*[3] [Gleichung (4.28)], findet man

$$\dot{\varepsilon}_\Theta = \frac{1}{r}\left[r \cdot \frac{\partial f}{\partial \Theta} + u(r, \alpha)\right].$$

[1] *I. Szabo*, Höhere technische Mechanik, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1956.
[2] Siehe Fußnote 11 auf Seite 153.
[3] *A. Sommerfeld*, Vorlesungen über theoretische Physik II: Mechanik der deformierbaren Medien, Leipzig 1949.

Da dies nach Voraussetzung 4 unabhängig von Θ und $dv = r\,d\alpha$ für $\Theta = \alpha$ sein soll, ist $f = \Theta/\alpha$ und

$$\dot{\varepsilon}_\Theta = \frac{1}{\alpha} + \frac{u}{r}, \qquad \dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial u}{\partial r}. \tag{4b}$$

Wegen $K = 0$ muß σ_Θ längs r beiderlei Vorzeichen besitzen. Dann herrscht jedenfalls nahe bei $r = a$ Druck, nahe bei $r = b$ Zug: $\sigma_\Theta < 0$ für $|r - a| < \varrho$; $\sigma_\Theta > 0$ für $|r - b| < \varrho$ und hinreichend kleines ϱ. Wir setzen

$$c_1 = \sup\{\bar{r} \mid \sigma_\Theta \leqq 0 \text{ und } \sigma_\Theta \leqq \sigma_r \text{ für } a \leqq r \leqq \bar{r}\},$$
$$c_2 = \inf\{\bar{r} \mid \sigma_\Theta \geqq 0 \text{ für } \bar{r} \leqq r \leqq b\}$$

gleich dem größten (kleinsten) Radius, unterhalb (oberhalb) dessen stets $\sigma_\Theta < 0$ und $\sigma_\Theta \leqq \sigma_r$ ($\sigma_\Theta > 0$) gilt, und erkennen sofort $a < c_1 \leqq c_2 < b$, ferner nach (2′), (3′) $\sigma_r < 0$ für $a < r \leqq c_1$ und $c_2 \leqq r < b$. Das *Tresca*sche bzw. *Mises*sche Fließkriterium lautet bei Unterdrückung der ohnehin verschwindenden Schubspannungsanteile

$F(\sigma) = \sigma_h - \sigma_\Theta = k$ bzw.
$\sigma_\Theta = -Y\ (a \leqq r \leqq c_1)$,
$F(\sigma) = \sigma_\Theta - \sigma_r = k$ bzw.
$\sigma_\Theta = \sigma_r + Y\ (c_2 < r \leqq b)$,
wobei $Y = k$.

$F(\sigma) = [(\sigma_r - \sigma_\Theta)^2 + (\sigma_\Theta - \sigma_h)^2 + (\sigma_h - \sigma_r)^2]^{\frac{1}{2}} = k$;
wegen $\sigma_h = 0$ mit den Lösungen

$$\sigma_\Theta = \frac{\sigma_r}{2} - \sqrt{Y^2 - \frac{3}{4}\sigma_r^2} \quad (a \leqq r \leqq c_1),$$

$$\sigma_\Theta = \frac{\sigma_r}{2} + \sqrt{Y^2 - \frac{3}{4}\sigma_r^2} \qquad (c_2 < r \leqq b),$$

wobei positive Wurzeln gewählt wurden und $Y = k/\sqrt{2}$ gilt. (5)

Die zugehörigen Stoffgesetze (bei Unterdrückung der verschwindenden Schubverzerrungen) sind

$\dot{\varepsilon}_h = -\dot{\varepsilon}_\Theta = \dot{\lambda}$, $\dot{\varepsilon}_r = 0$ für $a \leqq r < c_1$,
$\dot{\varepsilon}_\Theta = -\dot{\varepsilon}_r = \dot{\lambda}$, $\dot{\varepsilon}_h = 0$ für $c_2 < r \leqq b$.

$\dot{\varepsilon}_r = \mu(2\sigma_r - \sigma_\Theta)$,
$\dot{\varepsilon}_\Theta = \mu(2\sigma_\Theta - \sigma_r)$,
$\dot{\varepsilon}_h = \mu(-\sigma_r - \sigma_\Theta)$ mit $\mu = \dot{\lambda}/k$. (6)

Wir behaupten: Soweit überall $|\sigma_r| < Y$ (was bei kleinen α, also großen a, b wegen (2′), (3′) stets zu erwarten ist), gilt $c_1 = c_2 = c(\alpha)$.

Beweis: Die Werte c_1 und c_2 müssen durch Unstetigkeiten von σ_Θ gekennzeichnet sein. Die beiden Formen für σ_Θ der rechten Seite von (5) gehen nämlich höchstens für $|\sigma_r| = 2Y/\sqrt{3} > Y$ stetig ineinander über. $\sigma_\Theta = -Y$ der linken Seite kann nie, $\sigma_\Theta = Y + \sigma_r$ nur für $\sigma_r = -Y$ stetig das Vorzeichen wechseln. Wegen (4b) verlangt die Stetigkeit von u und σ_r in (6) $\mu = 0$. Ebenso folgt $\dot{\lambda} = 0$; denn weil dort $\sigma_r < 0$ gilt, besitzt das *Tresca*sche Fließkriterium nahe c_1, c_2 möglicherweise die dritte denkbare Gestalt $F(\sigma) = \sigma_h - \sigma_r = -\sigma_r = Y$, welche das Stoffgesetz $\dot{\varepsilon}_\Theta = 0$, $-\dot{\varepsilon}_r = \dot{\varepsilon}_h = \dot{\lambda}$ erzeugt. Bei c_1, c_2 findet eine Vertauschung der drei möglichen Formen des Stoffgesetzes statt, die wegen der Stetigkeit von $\dot{\varepsilon}_\Theta$ stets $\dot{\lambda} = 0$ bewirkt. Wir finden jedenfalls mit (6), (4b)

$$u(c_i, \alpha) = -\frac{c_i}{\alpha}, \qquad \frac{\partial u(c_i, \alpha)}{\partial r} = 0.$$

Es sei $c_1 < c_2$. Dann besitzt (vgl. Abb. 2) $u(r, \alpha)$ wenigstens einen dazwischen gelegenen weiteren Schnittpunkt mit der Geraden $-r/\alpha$. Offensichtlich gibt es einen von c_1 verschiedenen kleinsten solchen c_3. Dort muß gelten

$$u(c_3, \alpha) = -\frac{c_3}{\alpha}, \qquad \frac{\partial u(c_3, \alpha)}{\partial r} \leqq \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{r}{\alpha}\right)\Big|_{c_3} = -\frac{1}{\alpha} < 0.$$

Es folgt $\mu \neq 0$, $\dot{\lambda} \neq 0$, $\dot{\varepsilon}_\Theta = 0$, also $\sigma_\Theta = \sigma_r/2$ oder $|\sigma_r| = 2|Y|/\sqrt{3}$ auf den rechten Seiten von (5) und (6), während die linken Seiten von (6) nicht gelten können, so daß ein Fließkriterium $|\sigma_r| = Y$ richtig sein müßte. Beides stellt einen Widerspruch dar, weshalb die Voraussetzung $c_1 < c_2$ falsch und der Beweis beendet ist.

Wir beschränken uns zunächst auf kleine Biegungen derart, daß $|\sigma_r| < Y$. Hierfür gibt uns (2′), (3′) in Verbindung mit einer der Seiten von (5) und (6) das vollständige Gleichungssystem.

c) **Transformation auf neue Koordinaten.** Die bisher gewählten Variablen r und α haben zwei wesentliche Nachteile: Erstens bewegt sich der Balken als ganzer im Polarkoordinatensystem (was den Vergleich verschiedener Phasen erschwert), zweitens werden unsere Gleichungen für $\alpha = 0$ ($r = \infty$) singulär. Darüberhinaus bezieht sich α auf die willkürliche und vom Problem unabhängige Ausgangslänge l. Umrechnung auf andere Ausgangslängen wird erschwert.

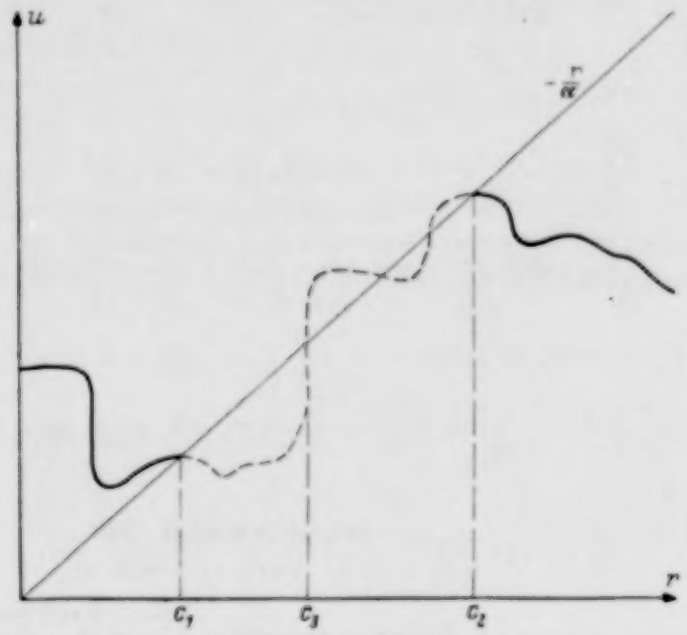

Abb. 2. Möglicher Verlauf von u.

Entgegen *Gaydon* transformieren wir bereits unsere Ausgangsgleichungen auf solche Koordinaten, welche die oben genannten Nachteile vermeiden:

$$\left.\begin{aligned} \alpha \to y &= \frac{t(\alpha)}{b(\alpha)} && (0 \leqq y < 1), \\ r \to x &= \frac{r - a(\alpha)}{b(\alpha) - a(\alpha)} && (0 \leqq x \leqq 1). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Wir zeigen, daß y eine eigentlich monotone wachsende Funktion von α ist. Damit ist die Berechtigung der ersten Substitution bewiesen. Die der zweiten sieht man sofort.

Bekanntlich (vgl. *Hill*[1], Abschn. III.2.) gilt[2] $\mu \geqq 0$, $\lambda \geqq 0$, also $\dot{\varepsilon}_\Theta \leqq 0$ für $a \leqq r \leqq c$ und $\dot{\varepsilon}_\Theta \geqq 0$ für $c \leqq r \leqq b$. Ähnlich dem Beweis in b) schließen wir $\dot{\varepsilon}_\Theta < 0$ für $r = a$, soweit $|\sigma_r| < Y$ für $a \leqq r \leqq c$ (bzw. $\dot{\varepsilon}_\Theta > 0$ für $r = b$, falls $|\sigma_r| < Y$ für $c \leqq r \leqq b$): Andernfalls gilt nämlich $\lambda = 0$ bzw. $\mu = 0$ für $r = a$; das Gleiche nach b) für $r = c$. Wie dort (vgl. Abb. 2: $c_1 = a$, $c_2 = c$) erkennt man die Existenz eines Punktes $r = d$, $a < d < c$, wo $\dot{\varepsilon}_\Theta = 0$, jedoch $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$, was wie oben auf den Widerspruch $|\sigma_r| \geqq Y$ führt. Nach allem ergibt sich also

$$\dot{\varepsilon}_\Theta|_{r=a} < 0 \leqq \dot{\varepsilon}_\Theta|_{r=b},$$

$$\dot{\varepsilon}_\Theta|_{r=b} - \dot{\varepsilon}_\Theta|_{r=a} > 0,$$

$$\frac{u(b,\alpha)}{b} - \frac{u(a,\alpha)}{a} > 0.$$

Wegen (7) ist dann

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a}{b}\left[\frac{u(b,\alpha)}{b} - \frac{u(a,\alpha)}{a}\right] > 0. \tag{8}$$

Damit ist die Berechtigung von (7) wenigstens im Falle $|\sigma_r| < Y$ bewiesen.

An Stelle von $u(r, \alpha)$ gebrauchen wir künftig die Funktion

$$w(x, y) = \frac{1}{y}\left[1 + u(r,\alpha)\frac{\alpha}{b}\right], \tag{9}$$

[1] Siehe Fußnote 3 auf Seite 153.

[2] Im vorliegenden Fall läßt sich ohne Schwierigkeiten direkt beweisen: Für $|\sigma_r| < Y$ erfüllt jedes Integral unserer Grundgleichungen unter gegebenen Randbedingungen $\mu \geqq 0$ bzw. $\lambda \geqq 0$.

wobei rechts r, α durch x, y ersetzt zu denken ist. An Stelle von R, R_0 benutzen wir $X(X_0, y)$, X_0 und gelangen zu folgenden transformierten, zunächst für $y > 0$ ($\alpha > 0$) gültigen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_r &= \frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial x}, \\ \dot{\varepsilon}_\Theta &= \frac{y}{\alpha}\frac{w-(1-x)}{1-y(1-x)}, \\ \dot{\varepsilon}_h &= \left[\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y}\right]\frac{\partial y}{\partial z}, \\ \frac{\partial y}{\partial z} &= \frac{y}{\alpha}\left[1+(1-y)\,w(1,y)-w(0,y)\right], \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ferner

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{w(X,y)-w(0,y)-X\left[w(1,y)-w(0,y)\right]}{y\left[1+(1-y)\,w(1,y)-w(0,y)\right]}. \tag{11}$$

Da nach (6) $\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\Theta + \dot{\varepsilon}_h = 0$ ist, so folgt

$$h\left[\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{w-(1-x)}{1-y(1-x)}\right]+y\left[1+(1-y)\,w(1,y)-w(0,y)\right]\frac{\partial h}{\partial y}=0 \tag{12}$$

und schließlich

$$\frac{\partial t}{\partial y} = t(y)\,\frac{w(1,y)-w(0,y)}{y\left[1+(1-y)\,w(1,y)-w(0,y)\right]}. \tag{13}$$

Dem Halbmesser $r = c$ der neutralen Faser entspreche $x = z(y)$. Aus $\dot{\varepsilon}_\Theta = 0$ für $x = z$ folgt wegen (10)

$$w(z(y), y)) = 1 - z(y). \tag{14}$$

Die Arbeitsdichte A errechnen wir aus

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\dot{A}}{\dfrac{\partial y}{\partial z}} = \sigma_r\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y}+\sigma_\Theta\frac{\partial \varepsilon_\Theta}{\partial y} = \frac{\sigma_r\dfrac{\partial w}{\partial x}+\sigma_\Theta\, y\dfrac{w-(1-x)}{1-y(1-x)}}{y\left[1+(1-y)\,w(1,y)-w(0,y)\right]}. \tag{15}$$

Weiter ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma_r = \frac{y}{1-y(1-x)}\left[\sigma_\Theta-\sigma_r\right], \qquad \frac{\partial}{\partial x}(h\,\sigma_r) = \frac{y}{1-y(1-x)}\left[h\,\sigma_\Theta - h\,\sigma_r\right] \tag{16}$$

(Gleichgewichtsbedingungen),

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_\Theta = -Y \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq z, \\ &\sigma_\Theta - \sigma_r = Y \quad \text{für} \quad z < x \leqq 1 \\ &\qquad (Y = k). \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} &\sigma_\Theta = \frac{\sigma_r}{2} - \sqrt{Y^2 - \frac{3}{4}\sigma_r^2} \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq z, \\ &\sigma_\Theta = \frac{\sigma_r}{2} + \sqrt{Y^2 - \frac{3}{4}\sigma_r^2} \quad \text{für} \quad z < x \leqq 1 \\ &\qquad (Y = k/\sqrt{2}). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

(Fließbedingungen nach (5)),

$$\left.\begin{aligned} &\left[1+(1-y)\,w(1,y)-w(0,y)\right]\frac{\partial h}{\partial y}+h\frac{w-(1-x)}{1-y(1-x)}=0, \\ &\frac{\partial w}{\partial x}=0 \qquad (0 \leqq x < z), \\ &\text{- - - - - - - - -} \\ &\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{w-(1-x)}{1-y(1-x)}=0, \\ &\frac{\partial h}{\partial y}=0 \qquad (z < x \leqq 1). \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} &\text{Wegen } \mu \neq 0 \text{ für } x \neq z \text{ (Beweis wie oben mittels Abb. 2)} \\ &\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2\,\sigma_r - \sigma_\Theta}{2\,\sigma_\Theta - \sigma_r}\,y\,\frac{w-(1-x)}{1-y(1-x)}, \\ &\left[1+(1-y)\,w(1,y)-w(0,y)\right]\frac{\partial h}{\partial y} \\ &+h\,\frac{\sigma_r+\sigma_\Theta}{2\,\sigma_\Theta-\sigma_r}\,\frac{w-(1-x)}{1-y(1-x)}=0 \\ &\qquad (0 \leqq x \leqq 1). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

[Stoffgesetz nach (6) und (12)].

a) Der ungebogene Stab. Für $y = 0$ bleibt die Koordinate x (im Gegensatz zu r) anschaulich sinnvoll. Das Gleiche gilt für die w beschreibenden Differentialgleichungen unter (18), sofern wir deren Gültigkeit im Falle $y = 0$ postulieren. Dies möge aus Stetigkeitsgründen geschehen. Wegen der Symmetrie des geraden Stabes gilt

$$z(0) = \frac{1}{2},$$

nach (18) und (14) also in beiden Fällen

$$w(x, 0) = \frac{1}{2}.$$

Postulieren wir ferner, $y = 0$ sei auch in bezug auf die Ableitungen von w und σ nicht singulär (dies wird sich im Falle des *Tresca*schen Kriteriums später exakt zeigen), so folgt durch Differentiation der Differentialgleichungen für w von (18) nach y an der Stelle $y = 0$

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right|_{y=0} = -\left[x - \frac{1}{2}\right] \left(\frac{1}{2} < x \leqq 1\right),$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = \begin{cases} m_1 + \frac{x}{2}(1-x) & \text{für} \quad \frac{1}{2} < x \leqq 1, \\ m_2 & \text{für} \quad 0 \leqq x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

(m_i = konst.). Damit dies für $x = \frac{1}{2}$ stetig bleibt: $m_2 - m_1 = \frac{1}{8}$.

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right|_{y=0} = -\frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\right] \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = \text{konst.} + \frac{x}{4}(1-x) \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1.$$

Für $y \to 0$ streben Zähler und Nenner von (11) gegen Null. Anwendung der *l'Hospital*schen Regel gibt als Grenzwert

$$\left.\frac{\partial X}{\partial y}\right|_{y=0} = \begin{cases} \frac{X}{8} & \text{für} \quad 0 \leqq X \leqq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}(1-X)\left(X - \frac{1}{4}\right) & \text{für} \quad \frac{1}{2} \leqq X \leqq 1. \end{cases} \qquad \left.\frac{\partial X}{\partial y}\right|_{y=0} = \begin{cases} \frac{X}{4}(1-X) \\ \text{für} \quad 0 \leqq X \leqq 1. \end{cases} \tag{11a}$$

Beide Seiten sind (sogar für $X = 1/2$) stetig und stetig differentiierbar. Entsprechend erkennt man nach (13)

$$\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0} = -\frac{t}{8}, \qquad \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0} = 0. \tag{13a}$$

3. Einige allgemeine Lösungsformeln. a) Formänderungsbeziehungen. Lediglich die zum *Tresca*schen Kriterium gehörigen linksseitigen Gleichungen gestatten teilweise geschlossene Integration, aber auch diese nur in bezug auf x. Hierzu folgt aus (18) unter der Randbedingung (14)

$$w(x, y) = \begin{cases} 1 - z & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq z(y), \\ [1 - z] - \frac{1}{2} y\,[(1-z)^2 + (1-x)^2] & \\ \hline 1 - y\,(1-x) & \text{für} \quad z(y) \leqq x \leqq 1, \end{cases} \tag{19}$$

also wegen (13)

$$\frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{t(y)}{2} \frac{(1-z)^2}{1 - y\,(1-z)\,[1 + 1/2\,(1-y)\,(1-z)]}, \tag{20}$$

wegen (11)

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \begin{cases} \frac{X(1-z)}{2\,[1 - y\,(1-z)\,[1 + 1/2\,(1-y)\,(1-z)]} & \text{für} \quad 0 \leqq X \leqq z(y), \\ \frac{(1-X)\,[X\,[1 - y\,(1-z)^2] - z^2]}{2\,[1 - y\,(1-X)]\,[1 - y\,(1-z)\,[1 + 1/2\,(1-y)\,(1-z)]]} & \text{für} \quad z \leqq X \leqq 1, \end{cases} \tag{21}$$

wegen (18)

$$\frac{\partial \ln h}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{z - X}{[1 - y(1 - X)]\,[1 - y(1 - z)\,[1 + 1/2\,(1 - y)(1 - z)]]} & \text{für} \quad 0 \leqq X \leqq z\,, \\ 0 & \text{für} \quad z(y) \leqq X \leqq 1\,. \end{cases} \tag{22}$$

b) Deutung und Vorschläge zur weiteren Integration. Spezialisierung von (20) auf $y = 0$ führt genau auf (13a), von (21) auf (11a), was unsere dortige Schlußweise rechtfertigt.

Die Gleichungen (19), (20), (21), (22) hängen von der unbekannten Funktion $z(y)$ ab. Sie gewähren daher nur bei festem y einen Einblick in das Formänderungsverhalten. Wesentlich sind folgende allgemeinen Erkenntnisse nach (21) und (22):

Der ganze „obere" Balkenteil, welcher im Verlauf der Biegung noch nicht von $z(y)$ überstrichen wurde — wie wir unten aus Abb. 3 sehen, also mindestens die obere Balkenhälfte — besitzt seine ursprüngliche Breite h_0. Für alle anderen Balkenzonen findet Verbreiterung statt. Dagegen nimmt t eigentlich monoton ab.

Wäre z bekannt, so lieferte (21) eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in $X(X_0, y)$ mit der Anfangsbedingung $X(X_0, y_0) = X_0$. Sie ist teilweise sogar linear; im anderen Teil dürfte sie kaum geschlossen integrierbar sein. Einfache (doch geschlossen kaum durchführbare Quadratur liefert h nach (22). Dieses ganze Vorgehen würde durch die rechte Seite von (16) illusorisch: Hier entstünde eine Verknüpfung zwischen $z(y)$ und h. Statt dessen schlagen wir die linke Seite vor, welche in Verbindung mit (17) und vorgegebenem $Y = Y(x)$ (insbesondere im idealplastischen Fall: $Y = Y_0$) die Spannungen σ_r, σ_Θ sowie (als Schnittpunkt der von beiden Rändern $x = 0$ und $x = 1$ her errechneten Kurven σ_r) $z(y)$ zu ermitteln gestattet.

c) Spannungen. Die Gleichungen (16) und (17) liefern für $0 \leqq x \leqq z(y)$

$$\sigma_r = -\frac{y}{1 - y(1 - x)} \int_0^x Y(x)\,dx\,; \tag{23a}$$

andererseits für $z(y) \leqq x \leqq 1$

$$\sigma_r = -y \int_x^1 \frac{Y}{1 - y(1 - x)}\,dx\,. \tag{23b}$$

Die Funktion $z(y)$ genügt der durch Gleichsetzen von (23a) und (23b) entstandenen Gleichung

$$\int_0^z Y(x)\,dx = [1 - y(1 - z)] \int_z^1 \frac{Y(x)}{1 - y(1 - x)}\,dx\,. \tag{24}$$

$Y = Y_0 =$ konst. führt auf die transzendenten Lösungsgleichungen

$$\begin{aligned} \gamma(1 + \ln \gamma) &= 1 - y\,, \\ \gamma(y) &= 1 - y\,[1 - z(y)]\,. \end{aligned} \tag{24a}$$

Allgemein liefert der Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\int_z^1 \frac{Y(x)}{1 - y(1 - x)}\,dx = \overline{Y} \int_z^1 \frac{dx}{1 - y(1 - x)}\,,$$

$$\int_0^z Y(x)\,dx = \overline{Y}'\,z\,,$$

wobei $\overline{Y}$, $\overline{Y}'$ gewisse mittlere Werte von Y auf den Intervallen $\langle 0, z\rangle$ bzw. $\langle z, 1\rangle$ darstellen. Je kleiner y ist, desto symmetrischer verläuft Y um $x = z_0 = 1/2$, desto genauer gilt also $\overline{Y} = \overline{Y}'$. Setzen wir diese Gleichheit annähernd für nicht zu große y voraus, so folgt wie oben (24a): z ist nahezu unabhängig von Y; Y dient lediglich zur exakten Festlegung der Spannungswerte nach (22a), (22b) und (17) (betr. σ_Θ).

Abb. 3 zeigt $z(y)$ als Lösung von (24a) und demonstriert damit die Wanderung der neutralen Faser.

d) Diskussion. Selbst die stark vereinfachte Theorie dieses Abschnittes läßt keine geschlossene Lösung zu. Sie führt immerhin im Gegensatz zum allgemeinen Fall auf geschlossene gewöhnliche Differentialgleichungen. Doch verzichten wir auf deren numerische Integration, weil wir die auf dem *Mises*schen Kriterium beruhenden Gleichungen im nächsten Abschnitt numerisch auswerten. An dieser Stelle begnügen wir uns mit den oben genannten generellen Ergebnissen.

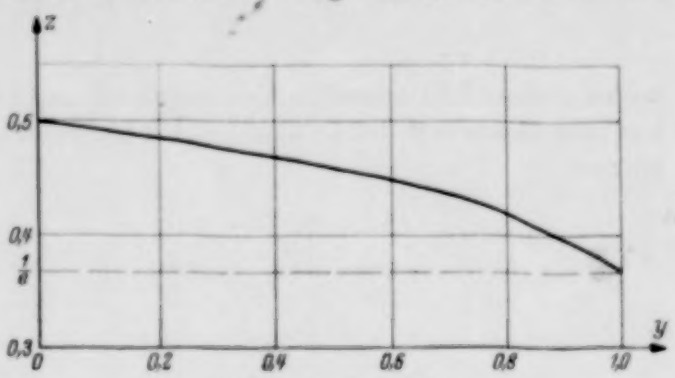

Abb. 3. z(y) nach (24a).

4. Numerische Integration. a) Beschreibung des Verfahrens. Zur numerischen Integration legen wir von vornherein die *Levy-Mises*schen Ansätze (rechte Spalte in Abschnitt 2) zugrunde und benutzen ein Differenzenverfahren, welches wie folgt arbeitet.

Gegeben sei ein gewisser Zustand y mit den Koordinaten der Volumenelemente $X(X_0, y)$ (wobei die Werte $X_0 = X_{0,i}\,(i = 0, 1, \ldots, N)$ beim Anfangsstadium $y = y_0$ das Intervall $\langle 0, 1\rangle$ in $N \geqq 2$ äquidistante Abschnitte teilen), den zugehörigen Breiten h und den Werten von Y. Ebenso sei die Balkendicke t bekannt. Die Schrittweite Δy wird vorgegeben. Dann werden folgende Schritte zur Bestimmung des nächsten Biegezustandes durchgeführt:

1. Erhöhung von y auf $y + \Delta y$.

2. Berechnung der zu den X gehörigen Spannungen σ_r, σ_Θ mittels (16) und (17), wobei ∂ durch Δ zu ersetzen und $\Delta x = X(X_{0,i}, y) - X(X_{0,i-1}, y)$ von Stelle zu Stelle neu zu wählen ist. Man findet den Schnittpunkt z beider Kurvenzüge von σ_r. Genauigkeitskontrolle: $\int_0^1 (h\,\sigma_\Theta)\,dx = 0$.

3. Konstruktion von w und $\frac{\partial w}{\partial x}$ durch Integration der ersten Gleichung (18) mit der Anfangsbedingung (14).

4. Errechnung der neuen Koordinaten $X + \frac{\partial X}{\partial y}\Delta y$ mittels (11) bzw. (11a).

5. Errechnung der neuen Breiten $h + \frac{\partial h}{\partial y}\Delta y$ nach der zweiten Gleichung (18).

6. $t + \frac{\partial t}{\partial y}\Delta y$ mittels (13) bzw. (13a).

7. $A + \Delta A = A + \frac{\partial A}{\partial y}\Delta y$ nach (15).

8. Y mittels des vorzugebenden Verfestigungsgesetzes $Y = Y(A)$.

b) Rechenprogramm und Verfestigungsgesetz. Es wurde ein dementsprechendes Programm für den Magnettrommelrechner IBM 650 entworfen und erprobt, welches gestattet, wahlweise die rechte Seite von (5) durch die linke zu ersetzen. Dies stellt eine Inkonsequenz gegenüber der Theorie

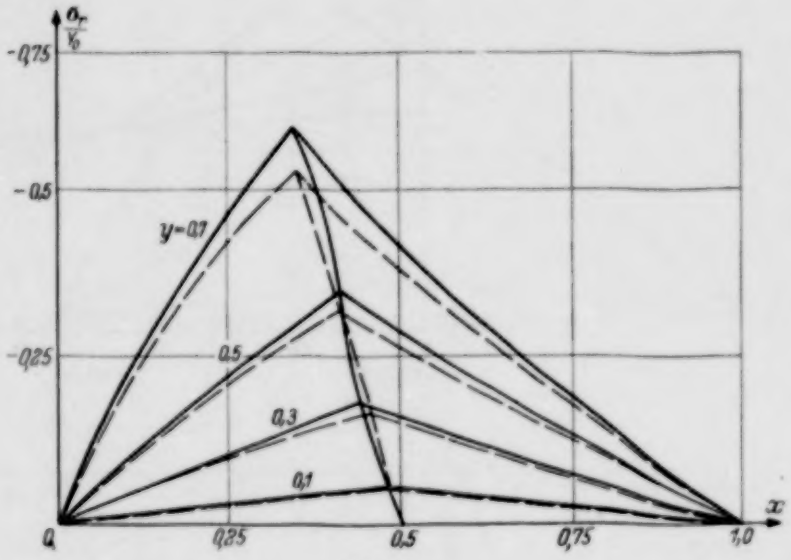

Abb. 4a.

Abb. 4a—e. Ergebnisse für $\nu = 0$ (Gestrichelte Kurven nach *Trescas* Kriterium).

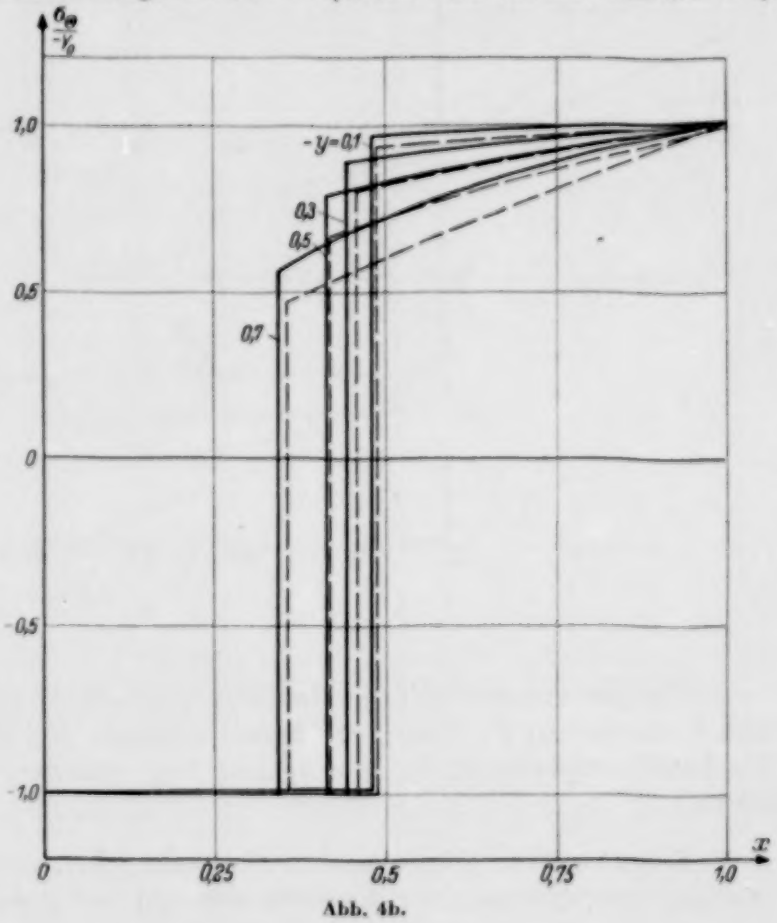

Abb. 4b.

des plastischen Potentials dar, entspricht aber einem allgemeinen Brauch. Als Verfestigungsgesetz wählen wir

$$Y = Y_0\left(1 + \nu\left(\frac{A}{Y_0}\right)^{\lambda}\right), \tag{25}$$

wobei ν eine nicht negative Konstante ist und λ die Werte 0, 1, 2, 3, . . . annehmen kann. Der Wert λ hat also nichts mit der in Abschnitt **2** benutzten und in Abschnitt **6** wieder gebrauchten Funktion λ zu tun.

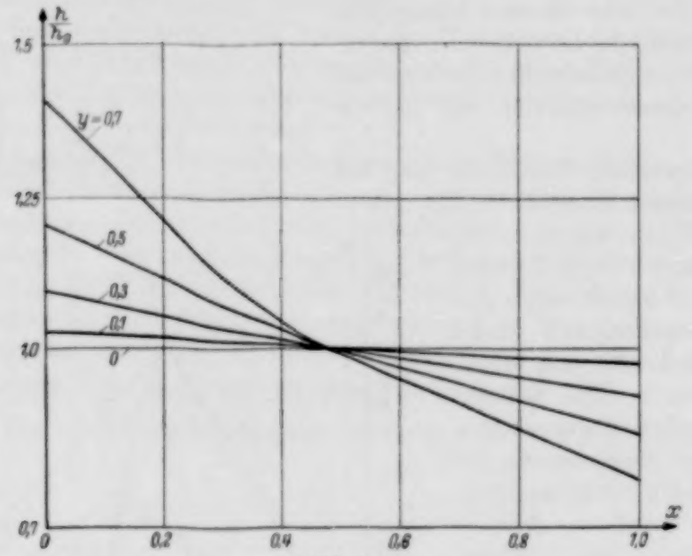

Abb. 4c.

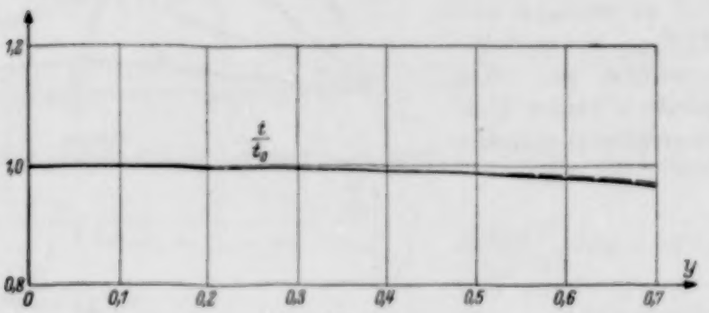

Abb. 4d.

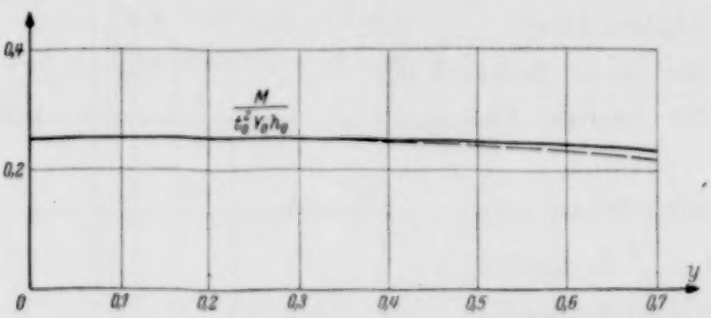

Abb. 4e.

In Zusammenarbeit mit dem Institut für Umformtechnik der Technischen Hochschule Hannover sind Versuche zur Prüfung der Theorie geplant. Bei diesen wird $Y(A)$ für die zu untersuchenden Werkstoffe experimentell (etwa mittels Zugversuches) festgelegt und an Stelle von (25) programmiert.

c) Ergebnisse. Die folgenden Beispiele gehen sämtlich von $y_0 = 0$, $h_0 = \text{konst.}$, $Y_0 = \text{konst.}$ aus und entsprechen einer Auswahl der von uns gerechneten Fälle $\lambda = 1, 2, 3$; $0 \leqq \nu \leqq 5$. Der

Wert $\nu = 0$ bedeutet idealplastischen Werkstoff (Abb. 4) und gestattet einen Vergleich mit den Näherungen *Gaydons*. In der Tat stimmen diese für kleine y fast vollständig überein. Lediglich für große y sinken entgegen *Gaydon* sowohl Stabdicke t wie Biegemoment

$$M = t^2 \int_0^1 \varkappa_\Theta \, x \, dx \qquad (26)$$

ab [Betreffend $\varkappa_i$ vgl. **2** b)]. Das steilere Absinken von M bei Benutzung von *Trescas* Kriterium entspricht wiederum *Gaydons* Ergebnissen.

Interessanterweise ist der Verlauf von h praktisch für alle Rechnungen — unabhängig vom Grad der Verfestigung — derselbe. Ähnliches finden wir bei t. Die Spannungen variieren in ihrer Größe, weniger im charakteristischen Verlauf (Abb. 5, 6, 7). Dabei bleiben die nach *Tresca* errechneten Spannungen und Momente wie bei *Gaydon* bis zu 20% unter denen nach *Mises*.

Abb. 8 gibt einige Beispiele von Momentenverläufen, Abb. 9 von Y-Verteilungen (nur für den Biegeparameter $y = 0{,}7$).

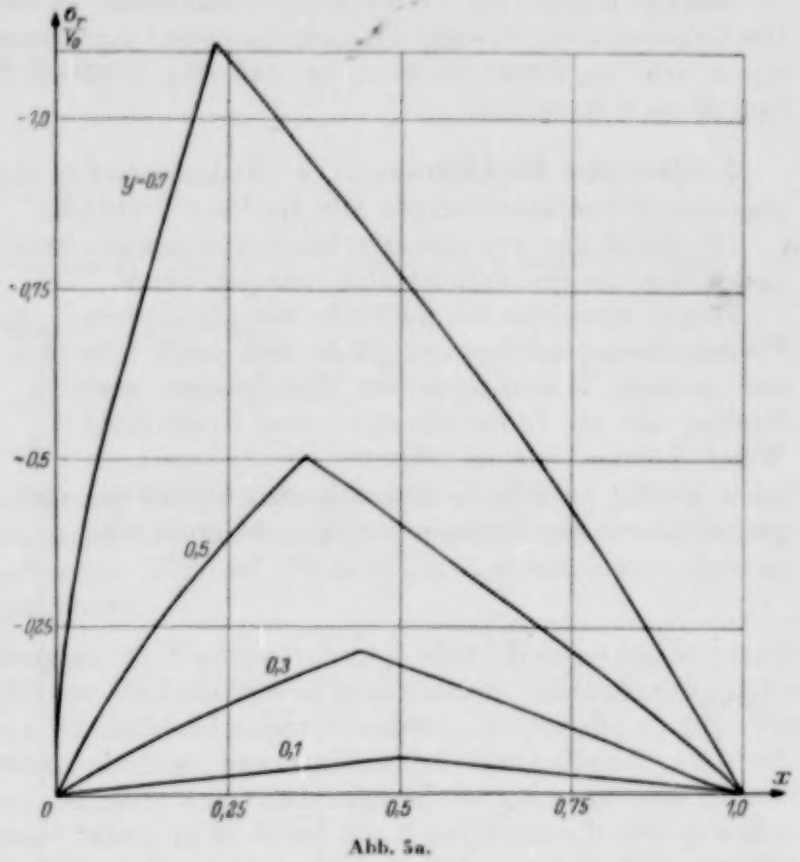

Abb. 5a.

d) Analyse und Vergleich der Ergebnisse. Die aufgezwungene Formänderung y scheint die veränderlichen Abmessungen h, t unabhängig vom Verfestigungsgrad zu bestimmen, so daß diese im wesentlichen durch Abb. 4 gegeben sind. Ein experimenteller Vergleich läßt daher lediglich auf die Richtigkeit der Theorie, keineswegs auf die des Verfestigungsgesetzes schließen. Hieran ändert die Benutzung des *Trescas*chen Kriteriums nichts. Dies gilt nach den Überlegungen von **3**c) (z unabhängig vom Verfestigungsgesetz) zwar auch bei konsequenter Benutzung des *Trescas*chen Kriteriums als Potential, doch erhält man wesentlich andere Formen der h- und t-Kurven [vgl. **3** b)]. Die Geometrie des Vorganges läßt auf das plastische Potential schließen! Auffälligerweise scheint h aber auch nach *Mises* eine Stelle starker Krümmung (die fast wie ein Knick wirkt) zu besitzen.

Das Biegemoment M hingegen wird schon durch inkonsequente Benutzung des *Trescas*chen Kriteriums im Rahmen der *Levy-Mises*schen Gleichungen verringert, hängt aber sehr stark vom Verfestigungsgesetz ab. Die Abszisse der Maxima ist variabel. Hierdurch unterscheidet sich wesentlich der Fall ebener

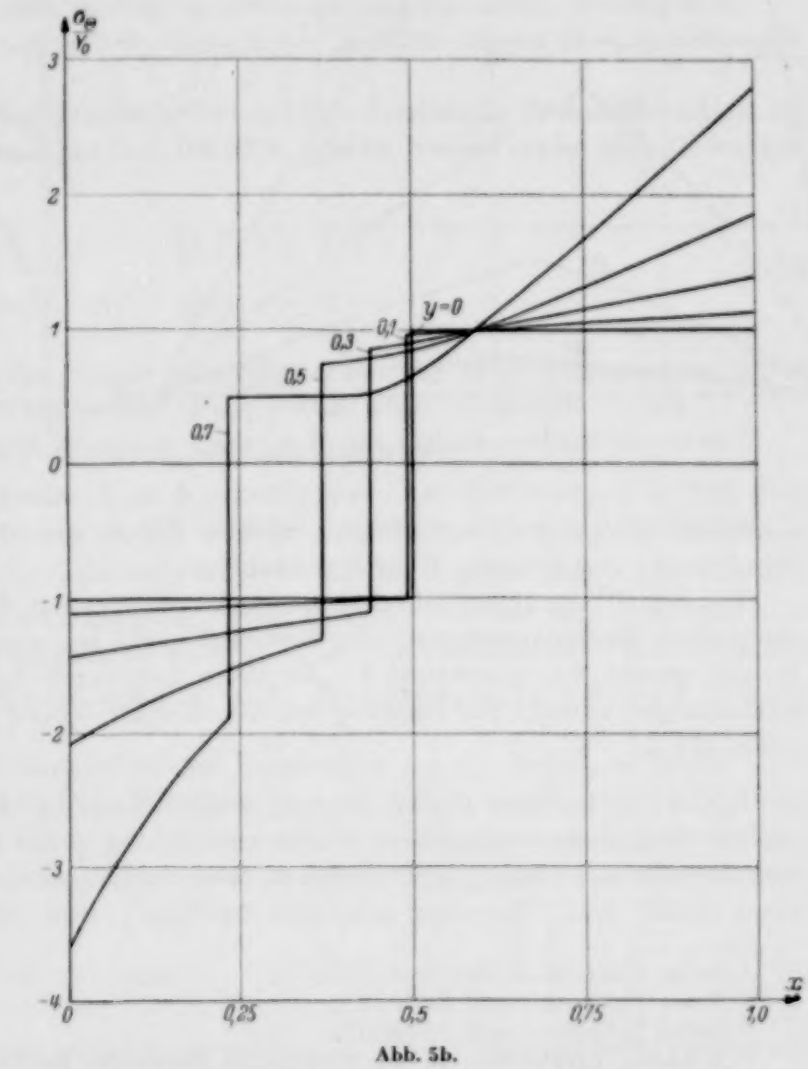

Abb. 5b.

Abb. 5a—b. Spannungsverläufe für $\nu = 2$, $\lambda = 1$ und *Misessches* Kriterium.

Formänderung (*Proksa*[1]) — wo die Maxima ziemlich unverändert bleiben — vom vorliegenden ebenen Spannungszustand.

Natürlich geht die Verfestigung unmittelbar in die Verteilung von Y ein. An ihr kann man (im Gegensatz zu M) sogar die Einflüsse von ν und λ getrennt beobachten. Leider ist Y ebensowenig wie σ_r oder σ_Θ direkt meßbar, so daß eine künftige Versuchsfolge ihr Hauptaugenmerk auf h, t und M zu richten hat.

5. Elastische Rückfederung. a) Begründung eines genäherten Ansatzes. Bei großen plastischen Formänderungen gilt die Voraussetzung:

Die durch das von uns errechnete Spannungssystem bedingte elastische Formänderung ist klein und ändert die Querschnittsabmessungen kaum.

Denkt man sich die elastische zur plastischen Formänderung addiert, so geben sich nach (16) nur geringe Änderungen der Spannungen und Kräfte, die zu vernachlässigen sind. Auf diese Weise können wir annehmen, die Spannungen seien richtig errechnet, und müssen zur erzwungenen plastischen Formänderung y lediglich eine

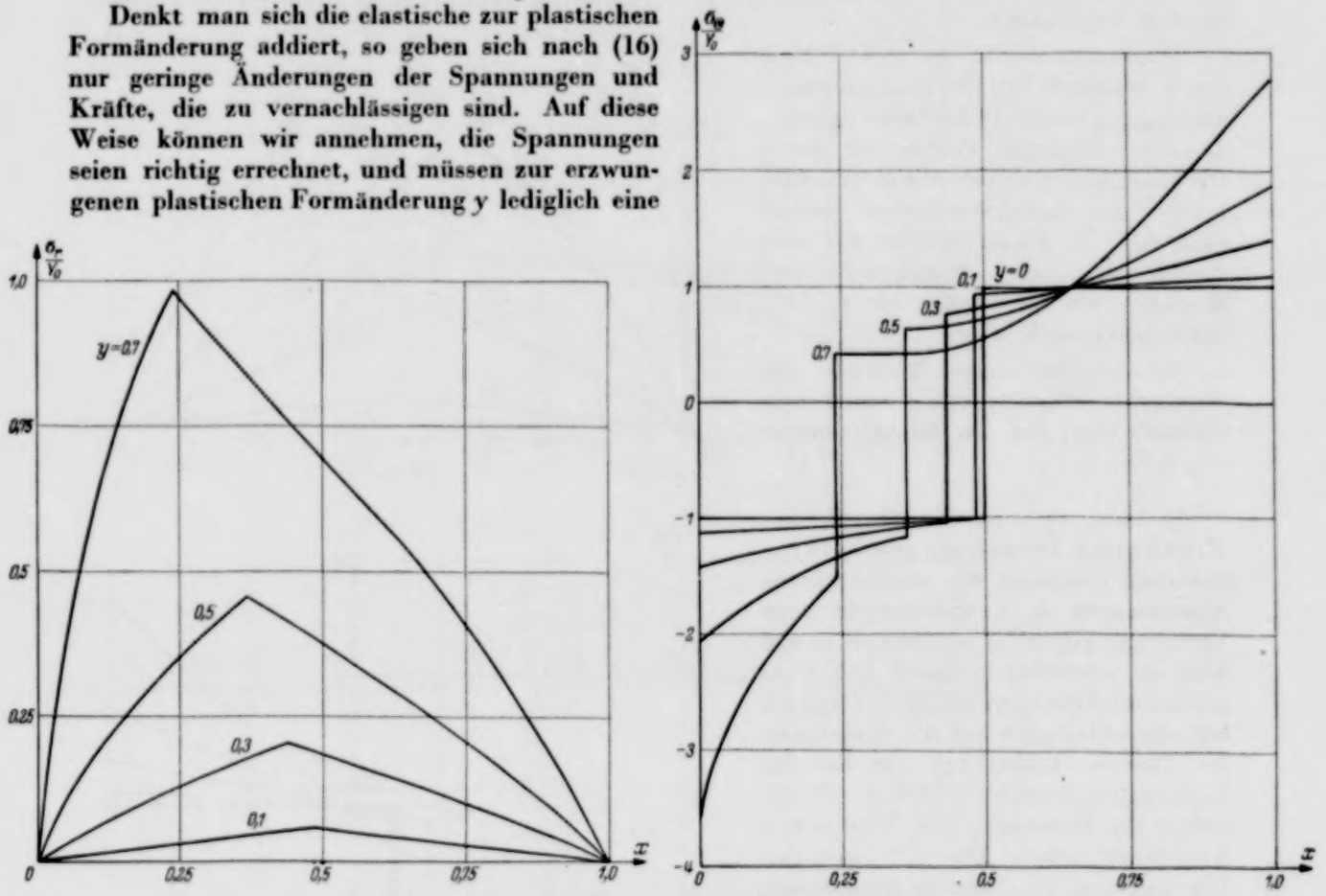

Abb. 6. Spannungsverlauf für $\nu = 2$, $\lambda = 1$ und *Trescasches* Kriterium.

elastische Biegung y_e hinzufügen, welche durch das errechnete Moment bewirkt wird und nach Entfernung der äußeren Kräfte zurückfedert.

Prinzipiell unzugänglich sind unseren Näherungen die durch Rückfederung im Werkstoff entstehenden Restspannungen. Sie bestehen wohl im wesentlichen aus Schubspannungen und verletzen unsere Voraussetzung 4. Zu ihrer korrekten Ermittlung müssen die *Prandtl-Reuß*schen Gleichungen sowohl für Biegung wie für Rückfederung zugrunde gelegt werden (vgl. *Hill*[2], Abschn. III.2.).

b) Formeln zur Berechnung der Rückfederung. Das Biegemoment M ist das durch unsere Rechnung vorgegebene Endmoment (26), y der (starrplastische) Biegezustand. Wir gehen zur Ermittlung von y_e den üblichen (auf der *Bernoulli*schen Hypothese beruhenden) Weg (vgl. etwa *Szabo*[4] § 12; für eine genauere Analyse[3], 10.6 oder *Seames* und *Conway*[5]), müssen jedoch

[1] Siehe Fußnote 10 auf Seite 153.
[2] Siehe Fußnote 3 auf Seite 153.
[3] Siehe Fußnote 1 auf Seite 155.
[4] *I. Szabó*, Einführung in die technische Mechanik, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.
[5] *A. E. Seames* and *H. D. Conway*, J. Appl. Mech. 24 (1957), S. 289.

den gekrümmten Anfangszustand $y > 0$ berücksichtigen. Dabei weicht die neutrale Faser von der Schwerpunktfaser ab. Statt dessen liefert die Bedingung der Kräftefreiheit bei linear verteilter Azimutalspannung

$$x_N = \frac{\int_0^1 \frac{h\,x}{1 - y\,(1-x)}\,dx}{\int_0^1 \frac{h}{1 - y\,(1-x)}\,dx}\,. \tag{27}$$

Da $y^2 \ll 1$, ferner die „Wanderungsgeschwindigkeit" $\partial x_N/\partial y \ll 1$, folgt bei Vernachlässigung von $y^2\,\partial x_N/\partial y$

$$y_e = \frac{M\,[1 - y\,(1 - x_N)]}{E\,t^2 \int_0^1 \frac{h\,x\,(x - x_N)}{1 - y\,(1-x)}\,dx}\,. \tag{28}$$

Auf die etwas mühselige, aber triviale Ausführung der Rechnung wurde verzichtet.

Soll der bleibende Zustand y erreicht werden, so ist zunächst bis $y + y_e$ zu biegen, so daß sich y nach der Rückfederung einstellt. Die Gleichungen (27) und (28) sind i. a. numerisch auszuwerten. Sie gehen für $y = 0$ in bekannte Gleichungen über.

6. Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen. a) Formulierung der Hauptergebnisse. Für $|\sigma_r| < Y$ beweist man ohne Schwierigkeiten, daß die in **4** a) konstruierte Näherungslösung im Limes $N \to \infty$, $\Delta y \to 0$ ein Integral unserer Grundgleichungen darstellt. Sie ist die einzige, für welche A stetig und stetig differentiierbar von x abhängt, vorausgesetzt, Y hängt ebenso von A ab. Unter der Einschränkung $|\sigma_r| < Y$ ist ferner Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen des *Tresca*schen Gleichungssystems gewährleistet: Dieses führte ja in Abschnitt **3** auf letzten Endes gewöhnliche Differentialgleichungen. Weitaus wichtiger scheint uns das folgende auf $|\sigma_r| \geqq Y$ bezügliche Ergebnis, welches zum Abschluß vorliegenden Aufsatzes bewiesen und diskutiert werden soll.

Bei geeigneter Wahl von Y und h sowie hinreichend großem y gestatten unsere Grundgleichungen keine Lösungen.

Zum Beweis beschränken wir uns der Einfachheit halber auf das *Tresca*sche Potential und geben $h \equiv 1$ vor, damit beide Seiten von (2′), (3′) zum gleichen Resultat führen. Ferner eignet sich die stetige Funktion

$$Y = \begin{cases} \frac{27}{r^3} & (1 \leqq r \leqq 3)\,, \\ 1 + p\,(r-3)^2 & (3 \leqq r \leqq 5) \end{cases} \tag{29}$$

($a = 1$, $b = 5$, $p =$ konst.) als Beispiel — der Beweis kann ebensogut mit ähnlichen anderen, sogar mit stetig differentiierbaren Y geführt werden, verliert dann jedoch an Einfachheit.

Zum Vergleich mit **2** b) benutzen wir wieder unser ursprüngliches Polarkoordinatensystem.

b) Beweis bei Benutzung des *Tresca*schen Kriteriums. Zunächst ist $c_1 = c_2$ [vgl. **2**b)] unmöglich. Denn σ_r, vom Rande $r = a$ her nach (3′) und (5) berechnet, liefert den Schnittpunkt $r = \sqrt{3}$ mit der Kurve $-Y(r)$ und erfüllt für nicht zu große $r > \sqrt{3}$ die Ungleichung $\sigma_r < -Y$. Da dies unmöglich ist, folgt $c_1 \leqq \sqrt{3}$. Andererseits liefert σ_r, vom Rande $r = b$ her errechnet, für hinreichend große Konstanten p einen Schnittpunkt r_S $(3 < r_S < 5)$ mit der Kurve $-Y$ und erfüllt für nicht zu kleine $r < r_S$ ebenfalls die Ungleichung $\sigma_r < -Y$. Es folgt $c_2 \geqq r_S > 3 > \sqrt{3} \geqq c_1$.

Aber auch $c_2 > c_1$ führt zum Widerspruch:

1) Liegen die Stellen $\lambda = 0$ in einem Teilintervall des Intervalles $\langle c_1, c_2 \rangle$ dicht[1], so liegen auch die Stellen $|\sigma_r| = Y$ dicht. Denn nach **2** b) liegt zwischen je zwei Stellen r mit $\lambda = 0$ eine Stelle $|\sigma_r| = Y$. Aus der Stetigkeit von σ_r und Y folgt $\sigma_r = Y$ oder $\sigma_r = -Y$ im ganzen Teilintervall — beispielsweise möge das erste gelten. An allen von $r = 3$ verschiedenen Stellen ist σ_r differentiierbar: (2′), (3′) liefert den Widerspruch

$$\sigma_\Theta = \frac{\partial (r\,Y)}{\partial r} = -2\,Y < -Y \qquad \text{bzw.} \qquad \sigma_\Theta = 1 + 3\,p\,r^2 > Y\,. \tag{30}$$

[1] Es muß dann unendlich viele geben — eine physikalisch untragbare Vorstellung. Schließt man sie von vornherein aus, wird der Beweis wesentlich einfacher.

2) Es enthalte nun jedes Teilintervall von $\langle c_1, c_2 \rangle$ ein anderes nicht ausgeartetes $\langle d_1, d_2 \rangle$, in welchem keine Stelle r mit $\lambda = 0$ liegt. Das Intervall $\langle d_1, d_2 \rangle$ sei maximal in dem Sinne, daß $\lambda = 0$ für $r = d_1$ und $r = d_2$. Ferner kann $\langle d_1, d_2 \rangle$ fremd zu $r = 3$ gewählt werden: Gilt $\lambda \neq 0$ auf dem ganzen Intervall $\langle c_1, c_2 \rangle$ mit Ausnahme der Endpunkte, so darf dort nur eine einzige Form des *Trescas*chen Kriteriums richtig sein. Wegen (5) käme nur die dort nicht angeführte dritte Form $|\sigma_r| = Y$ in Betracht, was zu (30) und einem Widerspruch führte. Es gibt somit eine Stelle $r = c$ aus dem Innern von $\langle c_1, c_2 \rangle$ mit $\lambda = 0$. Dann wählen wir $\langle d_1, d_2 \rangle$ aus demjenigen der Intervalle $\langle c_1, c \rangle$, $\langle c, c_2 \rangle$, welches $r = 3$ nicht enthält.

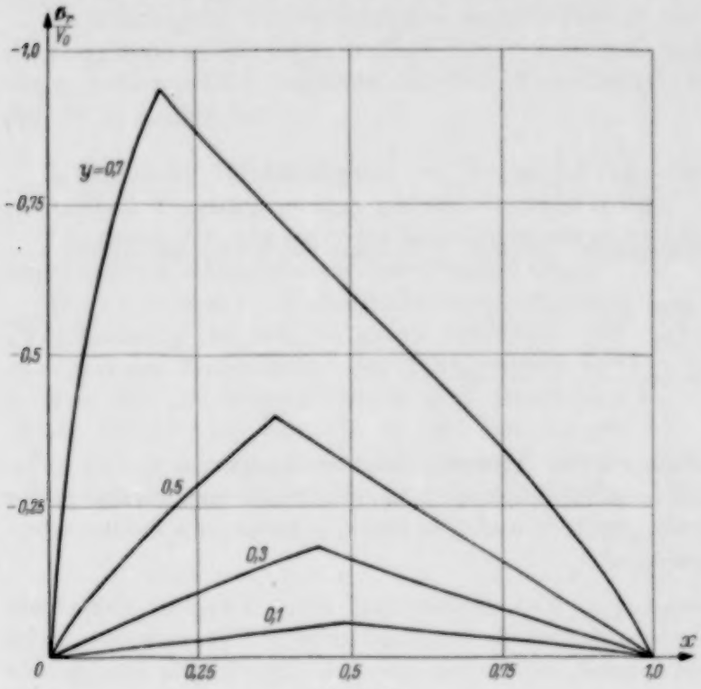

Abb. 7a.

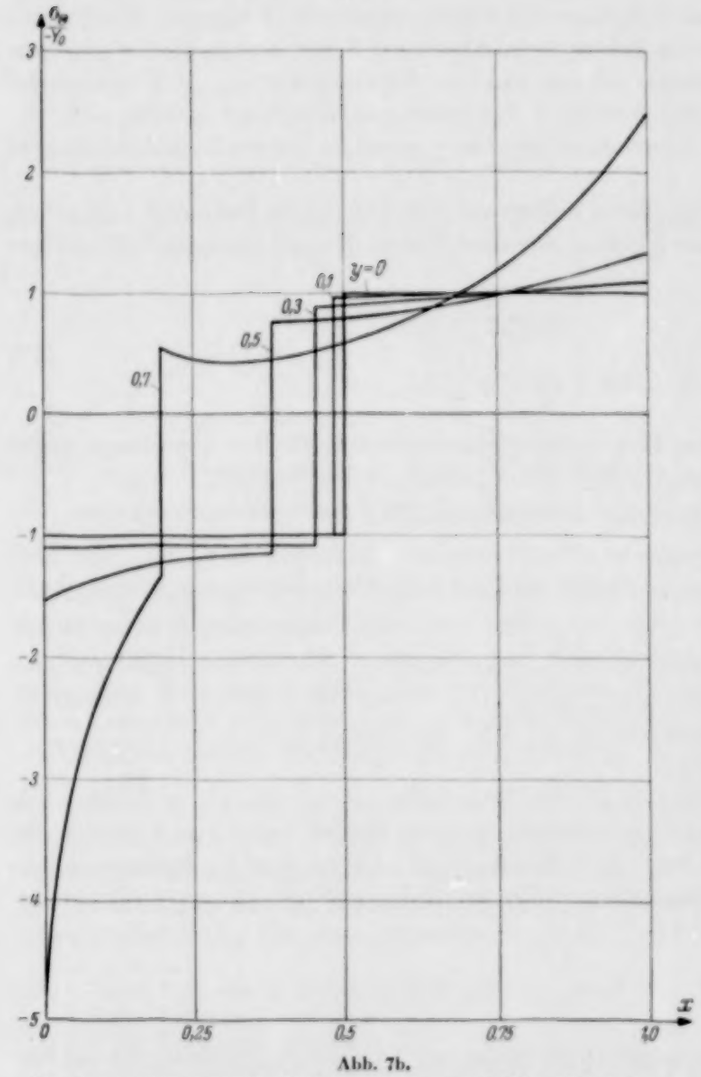

Abb. 7b.

Abb. 7a—b. Spannungsverläufe für $\nu = 3$, $\lambda = 2$ und *Mises*sches Kriterium.

Auf $\langle d_1, d_2 \rangle$ sind σ_r und Y überall differentiierbar. Nach **2** b) gibt es einen inneren Punkt $d \in \langle d_1, d_2 \rangle$ mit $|\sigma_r| = Y$, z. B. $\sigma_r = Y$. Dann muß ebenfalls

$$\frac{\partial}{\partial r}\sigma_r = \frac{\partial}{\partial r} Y$$

sein, weil sonst in unmittelbarer Nähe von $r = d$ Punkte lägen, für die $\sigma_r > Y$ wäre. Jetzt aber können wir (30) anschreiben und einen endgültigen Widerspruch feststellen.

c) Verhältnisse beim *Mises*schen Kriterium. Ein entsprechender Beweis dürfte sich unter Benutzung des v. *Mises*schen Kriteriums formulieren lassen. Da er wahrscheinlich wesentlich verwickelter wird, unterdrücken wir ihn hier. Bemerkenswerterweise stellt sich der gewünschte Widerspruch dabei nicht für $|\sigma_r| = Y$, sondern erst bei $|\sigma_r| = 2\,Y/\sqrt{3}$ ein, so daß $h\,\sigma_r$ als Kurve ein legitimes Minimum [nach (16) etwa bei $\sigma_r = \sigma_\Theta = -Y$] besitzen darf.

d) Abschließende Diskussion. Der Beweis unserer Behauptung arbeitete unabhängig vom Verfestigungsgesetz. Es wird lediglich ein fester Biegezustand mit vorgegebenen h und Y betrachtet, wobei die Art der Entstehung gleichgültig ist. Man kann y, h, Y z. B. durch spangebende Formung und durch irgendwie inhomogen legierten Werkstoff erzwungen denken.

In Wahrheit stellen sich bei konkreter Rechnung (so bei uns in Abschnitt **4**, wenn y etwa den Wert 0,9 erreichte. Wir geben daher nur Ergebnisse bis $y = 0{,}7$ wieder) schon vor Auftreten des eigentlichen Widerspruches große Ungenauigkeiten, negative Radikanden oder Doppeldeutigkeiten in z [wegen des

Minimums von σ_r; vgl. c)] ein, weil unser Beweis auch den allgemeinsten Fall mehrfacher Sprungstellen von σ_Θ ausschließen mußte. Dieser ist aber praktischer Rechnung ohnehin kaum zugänglich.

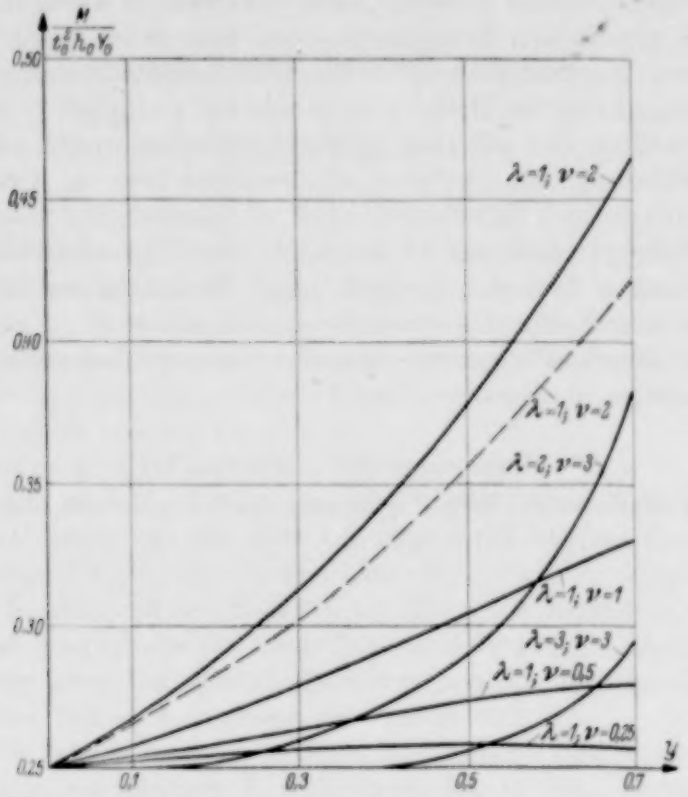

Abb. 8. Verlauf der Biegemomente. (Gestrichelte Kurve nach *Tresca*.)

Der — bei Eindeutigkeit von z — wesentliche Widerspruch besteht darin, daß nach dem Fließkriterium σ_r beschränkt bleibt, während die Gleichgewichtsbedingungen (16) das Gegenteil erzwingen wollen. Mit anderen Worten: Der wesentliche Widerspruch besteht zwischen Fließ-

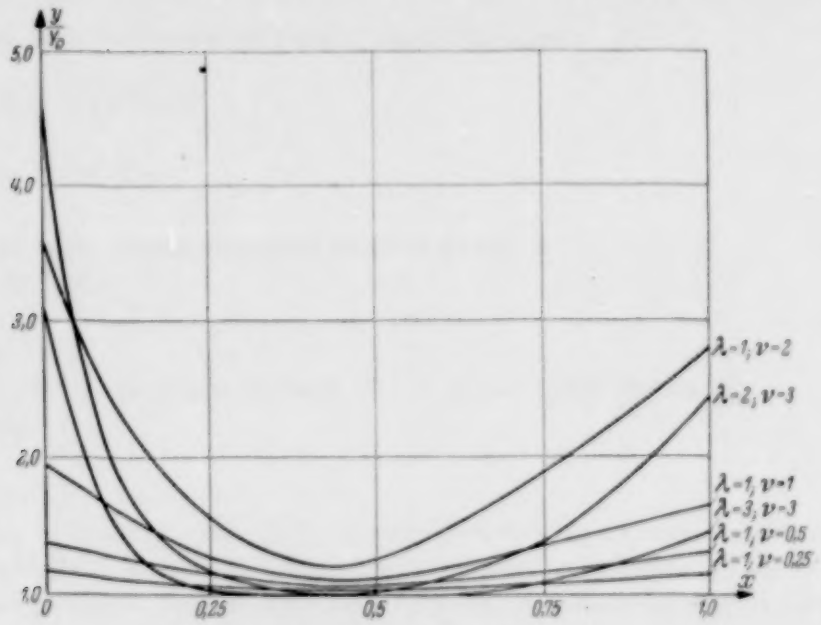

Abb. 9. Verteilungen von Y für $y = 0{,}7$.

kriterium und Gleichgewichtsbedingungen; er ist unabhängig vom Stoffgesetz. Wir kommen zu folgendem Schluß.

Die aufgetretene Unmöglichkeit einer Integration unserer Grundgleichungen bedeutet, daß diese den plastischen Formänderungszustand in gewissen Bereichen falsch beschreiben. Gründe könnten sein:

1. Die Annahme ebenen Spannungszustandes,
2. das Auftreten von Instabilitäten,
3. die Vernachlässigung des elastischen Anteiles,
4. ein prinzipieller Fehler der Theorie.

Die Gründe 1. bis 3. beziehen sich auf willkürliche Vernachlässigungen im Ansatz. Fehlerquellen bei 1. und 3. sind unwahrscheinlich: 1. entspricht einer allgemein gebräuchlichen Annahme und kann durch ein Gedankenexperiment beliebig genau verwirklicht werden; 3. müßte sich bei kleinen — nicht bei großen — plastischen Formänderungen bemerkbar machen im Gegensatz zu den Erfahrungen bei unseren Rechnungen. Der Grund 2. könnte verantwortlich sein. Allerdings müßte eine instabile Auslenkung des Balkens nach wie vor bezüglich $\Theta = 0$ symmetrisch bleiben. In diesem Querschnitt müßten also plötzlich starke Schubspannungen auf E wirken, die wir aber gedanklich durch Verkleinerung von h beliebig abschwächen können. Unser Widerspruch dagegen ist unabhängig von h.

Wir lenken die Aufmerksamkeit auf Grund 4. In der Tat wurde das Fließkriterium bisher lediglich aus mathematischen Gründen gewählt ohne Rücksicht auf andere bereits bestehende Spannungsbedingungen, so daß eine Unverträglichkeit denkbar ist. Zur Klärung müssen grundlegende und quantitativ einwandfrei auszuwertende Versuche bei mehrdimensionaler Spannung und Formänderung dienen.

(Eingegangen am 1. August 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Horst Lippmann*, Hannover-Döhren, Am Lindenhofe 37.

Versagenszeit beim Kriechen

Von **F. Rimrott**

1. Einleitung. In dieser Abhandlung ist eine Beziehung (Kriechgleichung) zwischen dem Innendruck in einer Hohlkugel und der Vergleichskriechgeschwindigkeit nach *von Mises* unter Verwendung von *Ludwik*-Dehnungen und -Spannungen entwickelt worden.

In diese Kriechgleichung ist dann ein bekanntes, durch einen einfachen Zugversuch erhältliches Kriechgesetz eingesetzt. Daraus ergibt sich eine Gleichung, die die Kriechgeschwindigkeit als Funktion der Kriechdehnung ausdrückt. Diese Gleichung kann integriert werden und gibt die Kriechdehnung in Abhängigkeit von der Zeit.

Der letzte Abschnitt lehnt sich an eine von *Hoff*[1] entwickelte Theorie an, in der für den einfachen Zugstab gezeigt wird, daß die Zeitspanne bis zu einer unendlichen Kriechdehnung (Versagenszeit) benutzt werden kann, um die Zeit bis zum tatsächlichen Bruch (Bruchzeit) zu bestimmen. Die dickwandige Kugel kann in ähnlicher Weise wie der Zugstab behandelt werden. Nur müssen im Falle der Kugel (und des Hohlzylinders) zwei Umstände, nämlich das Schwächerwerden der Wand und das Anwachsen der angreifenden Belastung, dadurch, daß sich die Innenfläche der Hohlkugel vergrößert bei gleichbleibendem Druck, berücksichtigt werden, während beim einfachen Zugstab nur Schwächerwerden des Stabes auftritt.

Für die in dieser Abhandlung vorgesehenen Kriechdehnungen und -zeiten kann Primärkriechen vernachlässigt werden. Das verwendete Kriechgesetz drückt das Verhalten von Werkstoffen während Sekundärkriechens aus, und es ist außerdem angenommen, daß es das Verhalten von Werkstoffen während Tertiärkriechens angemessen widergibt.

Neben der ausführlichen Behandlung der Hohlkugel, sind auch die Endergebnisse für Hohlzylinder und Zugstab angeführt.

2. Bezeichnungen. Wir benutzen folgende Bezeichnungen:

A Kriechbeizahl ($\mathrm{Tag^{-1}\,kg^{-n}\,cm^{2n}}$),
F Fläche ($\mathrm{cm^2}$),
K Kriechmodul ($\mathrm{kg\,cm^{-2}\,Tag}$),
P Zuglast (kg),
a, a' Anfänglicher und verformter Innenhalbmesser (cm),
b, b' Außenhalbmesser (cm),
h, h' Wanddicke (cm),
n Kriechhochzahl,
p Innendruck ($\mathrm{kg\,cm^{-2}}$), ebenfalls anfängliche Zugspannung ($\mathrm{kg\,cm^{-2}}$),
r, r' Halbmesser (cm),
t Zeit (Tag),
u Verlängerung (cm),
ε *Ludwik*-Dehnung (Längung), ebenfalls Vergleichsdehnung (Vergleichslängung),
$\dot{\varepsilon}$ Kriechgeschwindigkeit, ebenfalls Vergleichskriechgeschwindigkeit ($\mathrm{Tag^{-1}}$),
σ *Ludwik*-Spannung (wahre Spannung), ebenfalls Vergleichsspannung ($\mathrm{kg\,cm^{-2}}$).

Die Fußzeiger bedeuten:

a am Innenhalbmesser,
b am Außenhalbmesser,
r radial,
v beim Versagen,
ϑ tangential (Kugelkoordinate ϑ),
ψ tangential (Kugelkoordinate Φ).

[1] *N. J. Hoff*, Appl. Mech., Trans. ASME 75 (1953), S. 105.

3. Annahmen. Die später folgenden Ableitungen sind auf folgende Annahmen aufgebaut:

1) Die Wichte des Werkstoffes bleibt unverändert:

$$\varepsilon_\vartheta + \varepsilon_r + \varepsilon_\psi = 0 \,. \tag{1}$$

2) Die Verhältnisse der Hauptschubspannungen zu den Hauptschubdehnungsgeschwindigkeiten sind gleich:

$$\frac{\sigma_\vartheta - \sigma_r}{\dot{\varepsilon}_\vartheta - \dot{\varepsilon}_r} = \frac{\sigma_r - \sigma_\psi}{\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\psi} = \frac{\sigma_\psi - \sigma_\vartheta}{\dot{\varepsilon}_\psi - \dot{\varepsilon}_\vartheta} \,. \tag{2}$$

3) Es gibt eine Beziehung zwischen der Vergleichsdehnungsgeschwindigkeit und der Vergleichsspannung, die gleich der Beziehung zwischen Dehnungsgeschwindigkeit und Spannung beim einfachen Zugversuch ist:

$$\dot{\varepsilon} = f(\sigma) \,. \tag{3}$$

4) Der Körper ist aus einem isotropen und homogenen Werkstoff hergestellt und ändert seine Gestalt während des Kriechens nicht.

Ähnliche Annahmen wurden auch von *Soderberg*[1], *Marin*[2], *Bailey*[3], *Johnson*[4] und *Nadai*[5] gemacht, mit dem Unterschied, daß in dieser Abhandlung *Ludwik*-Spannungen und -Dehnungen benutzt werden.

Die Annahmen 1) und 2) können zusammengefaßt werden zu

$$\dot{\varepsilon}_\vartheta = \frac{1}{K}\left[\sigma_\vartheta - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\psi)\right], \quad \dot{\varepsilon}_r = \frac{1}{K}\left[\sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_\psi + \sigma_\vartheta)\right], \quad \dot{\varepsilon}_\psi = \frac{1}{K}\left[\sigma_\psi - \frac{1}{2}(\sigma_\vartheta + \sigma_r)\right], \tag{4}$$

wobei der Kriechmodul K durch

$$K = \frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}} \tag{5}$$

gegeben ist und unter Benutzung von Annahme 3.) für jeden Spannungszustand berechnet werden kann.

4. Kriechgleichung. a) Dickwandige Kugel. Der Kürze halber sei die Beziehung zwischen dem Innendruck und der Kriechgeschwindigkeit hier Kriechgleichung genannt. Die Spannungen, Dehnungen, Kriechgeschwindigkeiten sind einerseits voneinander abhängig, nämlich $\sigma = f(\dot{\varepsilon})$, und $\varepsilon = f(\dot{\varepsilon})$, andererseits sind alle drei Größen auch Funktionen vom Halbmesser r und der Zeit t, da $\dot{\varepsilon} = f(r, t)$ ist.

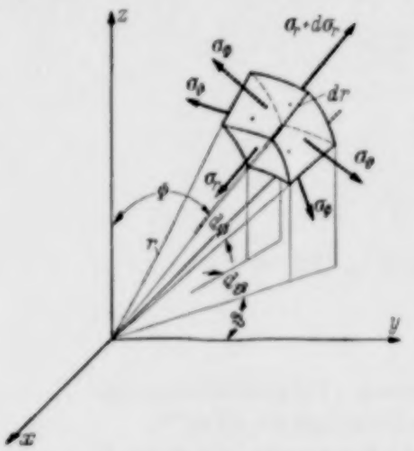

Abb. 1. Element einer verformten Kugel.

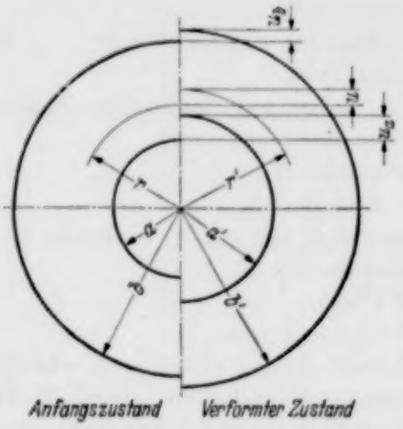

Abb. 2. Querschnitt einer dickwandigen Hohlkugel oder eines dickwandigen Hohlzylinders.

Die Bedingung für radiales Gleichgewicht einer Kugel unter Innendruck (Abb. 1) ist für den verformten Zustand gegeben durch

$$r' \frac{d\sigma_r}{dr'} = 2\,(\sigma_\vartheta - \sigma_r) \,. \tag{6}$$

[1] *C. R. Soderberg*, Trans. ASME 58 (1936), S. A 150.
[2] *J. Marin*, Trans. ASME 58 (1936), S. A 21.
[3] *R. W. Bailey*, Proc. Institution Mechanical Engineers, England, 154 (1951), S. 425.
[4] *A. E. Johnson*, Proc. Institution Mechanical Engineers, England, 164 (1951), S. 432.
[5] *A. Nadai*, J. Appl. Physics 8 (1937), S. 418.

Die *Ludwik*-Dehnungen sind (Abb. 2)

$$\varepsilon_\vartheta = \ln\left(\frac{r'}{r}\right) = \ln\left(1 + \frac{u}{r}\right), \tag{7}$$

$$\varepsilon_r = \ln\left(\frac{\partial r'}{\partial r}\right) = \ln\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right), \tag{8}$$

$$\varepsilon_\psi = \ln\left(\frac{r'}{r}\right) = \ln\left(1 + \frac{u}{r}\right). \tag{9}$$

Die Größe u läßt sich aus den Gleichungen (7) und (8) entfernen, wenn diese zusammengefaßt werden zu

$$r\frac{\partial \varepsilon_\vartheta}{\partial r} = \exp(\varepsilon_r - \varepsilon_\vartheta) - 1. \tag{10}$$

Die Beziehungen in Gleichungen (7) und (8) können benutzt werden um die Gleichgewichtsgleichung (6) umzuwandeln zu

$$r\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = 2(\sigma_\vartheta - \sigma_r)\exp(\varepsilon_r - \varepsilon_\vartheta). \tag{11}$$

Eine hohle Kugel unter Innendruck gehört zu den Fällen, in denen die weitere Ableitung der Kriechgleichung entweder auf die Vergleichskriechdehnung oder die Vergleichskriechgeschwindigkeit aufgebaut werden kann. Die Vergleichskriechdehnung nach *von Mises*, die hier benutzt werden soll, ist festgelegt als

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_\vartheta - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_\psi)^2 + (\varepsilon_\psi - \varepsilon_\vartheta)^2}. \tag{12}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (7), (8) und (9) sowie unter Berücksichtigung der Bedingung (1) läßt sich (12) vereinfachen zu

$$\varepsilon = 2\varepsilon_\vartheta = 2\varepsilon_\psi = -\varepsilon_r. \tag{13}$$

Die Vergleichsspannung nach *von Mises* ist

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_\vartheta - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\psi)^2 + (\sigma_\psi - \sigma_\vartheta)^2}. \tag{14}$$

Da nach (7) und (9) $\varepsilon_\vartheta = \varepsilon_\psi$ ist, ergibt sich aus (4), daß $\sigma_\vartheta = \sigma_\psi$ ist; damit kann (14) vereinfacht werden zu

$$\sigma = \sigma_\vartheta - \sigma_r = \sigma_\psi - \sigma_r. \tag{15}$$

Die Einführung der Größen σ, gegeben durch (15), und ε, gegeben durch (13), in (11) führt zu

$$r\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = 2\sigma\exp\left(-\frac{3\varepsilon}{2}\right). \tag{16}$$

Gleichung (10) kann nach Einführung der Größe ε aus (13) integriert werden und ergibt

$$\varepsilon = \frac{2}{3}\ln\left(1 + \frac{T(t)}{r^3}\right), \tag{17}$$

wo $T(t)$, die Integrationskonstante nach der Veränderlichen r, eine Funktion der Zeit allein ist. Für die Vergleichsdehnung ε_a für $r = a$, wird (17)

$$\varepsilon_a = \frac{2}{3}\ln\left(1 + \frac{T(t)}{a^3}\right). \tag{18}$$

Durch Zusammenfassung der Gleichungen (17) und (18) kann man $T(t)$ ausscheiden und erhält

$$\varepsilon = \frac{2}{3}\ln\left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^3\right]\left(\exp\frac{3\varepsilon_a}{2} - 1\right), \tag{19}$$

eine Gleichung, die die Verteilung der Vergleichsdehnung über die Kugelwand für eine gegebene Vergleichsdehnung ε_a am inneren Halbmesser darstellt.

Die Kriechgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}$ ist die partielle Ableitung der Dehnung ε nach der Zeit:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\left(\frac{a}{r}\right)^3 \exp\left(\frac{3\varepsilon_a}{2}\right)}{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^3\left[\exp\left(\frac{3\varepsilon_a}{2}\right) - 1\right]}\dot{\varepsilon}_a. \tag{20}$$

Die partielle Ableitung $\partial\dot{\varepsilon}/\partial r$ ergibt sich aus (20) bei Berücksichtigung der Beziehung (19) zu

$$\frac{\partial\dot{\varepsilon}}{\partial r} = -\frac{3}{r}\,\dot{\varepsilon}\,\exp\left(-\frac{3\,\varepsilon}{2}\right). \tag{21}$$

Aus (16) und (21) erhält man

$$\frac{d\sigma_r}{d\dot{\varepsilon}} = -\frac{2}{3}\,\frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}}\,, \tag{22}$$

nach Integration zwischen entsprechenden Grenzen ergibt sich die Kriechgleichung für die dickwandige Kugel zu

$$p = \frac{2}{3}\int_{\dot{\varepsilon}_b}^{\dot{\varepsilon}_a} \frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}}\,d\dot{\varepsilon}\,, \tag{23}$$

wobei

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3 \exp\left(\frac{3\,\varepsilon_a}{2}\right)}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^3\left[\exp\left(\frac{3\,\varepsilon_a}{2}\right)-1\right]} \tag{24}$$

ist, wie sich aus (20) ergibt.

b) Dickwandiger Zylinder. Für einen dickwandigen Zylinder mit geschlossenen Enden unter Innendruck kann die der Gleichung (23) entsprechende Kriechgleichung auf ähnliche Weise[1] abgeleitet werden. Sie ist

$$p = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\dot{\varepsilon}_b}^{\dot{\varepsilon}_a} \frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}}\,d\dot{\varepsilon} \tag{25}$$

mit

$$\dot{\varepsilon}_b = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 \exp\sqrt{3}\,\varepsilon_a}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\left[\exp\left(\sqrt{3}\,\varepsilon_a\right)-1\right]}\,\dot{\varepsilon}_a\,. \tag{26}$$

c) Dünnwandige Kugel. Die Kriechgleichung für eine dünnwandige Kugel läßt sich leicht ableiten. Wenn die Wichte des Werkstoffes unverändert bleibt, dann muß sein

$$4\,\pi\,a'^2\,h' = 4\,\pi\,a^2\,h\,. \tag{27}$$

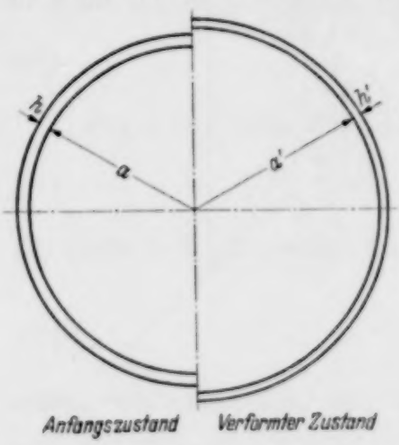

Abb. 3. Querschnitt einer dünnwandigen Hohlkugel oder eines dünnwandigen Zylinders.

Aus (7) und (13) ist ersichtlich, daß

$$a' = a\,\exp\frac{\varepsilon}{2} \tag{28}$$

ist. Demnach wird gemäß (27) und (28)

$$h' = h\,\exp\left(-\varepsilon\right). \tag{29}$$

Für eine dünnwandige Kugel unter Innendruck ist angenähert

$$\sigma_\vartheta = \frac{a'\,p}{2\,h'} = \sigma_\psi \tag{30}$$

und

$$\sigma_r = 0\,. \tag{31}$$

Aus (15), (28), (29), (30) und (31) ergibt sich die Kriechgleichung für die dünnwandige Kugel zu

$$p = \frac{2\,h}{a}\,\sigma\,\exp\left(-\frac{3\,\varepsilon}{2}\right). \tag{32}$$

d) Dünnwandiger Zylinder. Die Kriechgleichung für einen dünnwandigen Zylinder mit geschlossenen Enden unter Innendruck läßt sich in ähnlicher Weise wie Gleichung (32) ableiten.

[1] *F. Rimrott*, ASME-paper 59—APM-6.

Für den dünnwandigen Zylinder ist

$$p = \frac{2h}{\sqrt{3}\,a}\,\sigma \exp\left(-\sqrt{3}\,\varepsilon\right). \tag{33}$$

e) Zugstab. Für einen Stab unter konstanter Zuglast[1] läßt sich die Kriechgleichung ableiten zu

$$p = \sigma\, e^{-\varepsilon} \tag{34}$$

mit $p = P/F_0$, wo P die konstante Last und F_0 der Anfangsquerschnitt ist.

5. Kriechgesetz. Das am meisten benutzte Gesetz für die Beschreibung des Kriechverhaltens eines Werkstoffes lautet

$$\dot{\varepsilon} = A\,\sigma^n, \tag{35}$$

was nun in die in den vorhergehenden Abschnitten abgeleiteten Kriechgleichungen eingesetzt werden wird.

a) Dickwandige Kugel. Wenn (35) in (23) eingesetzt wird, dann ergibt sich nach Ausführung der Integration

$$p = \frac{2n}{3A^{1/2}}\left(\dot{\varepsilon}_a^{1/n} - \dot{\varepsilon}_b^{1/n}\right). \tag{36}$$

Drückt man $\dot{\varepsilon}_b$ durch (24) aus, so kann (36) nach $\dot{\varepsilon}_a$ aufgelöst werden:

$$\dot{\varepsilon}_a = \frac{3^n A\, p^n}{2^n n^n}\left[1 - \left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3 \exp\left(\frac{3\varepsilon_a}{2}\right)}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^3\left[\exp\left(\frac{3\varepsilon_a}{2}\right) - 1\right]}\right)^{1/n}\right]^{-n}. \tag{37}$$

Gleichung (37) ist eine Differentialgleichung, die gelöst werden muß, wenn man eine Beziehung zwischen Kriechdehnung und Zeit erhalten will. Integration ergibt für konstanten Innendruck

$$\int_0^{\varepsilon_a} \left[1 - \left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3 \exp\left(\frac{3\varepsilon_a}{2}\right)}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^3\left[\exp\left(\frac{3\varepsilon_a}{2}\right) - 1\right]}\right)^{1/n}\right]^{n} d\varepsilon_a = \frac{3^n A\, p^n}{2^n n^n}\, t\,. \tag{38}$$

Mit der Abkürzung

$$J = \int_0^{\varepsilon_a} \left[1 - \left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3 \exp\left(\frac{3\varepsilon_a}{2}\right)}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^3\left[\exp\left(\frac{3\varepsilon_a}{2}\right) - 1\right]}\right)^{1/n}\right]^{n} d\varepsilon_a \tag{39}$$

wird die Zeit

$$t = \frac{2^n}{3^n}\,\frac{n^n}{A\,p^n}\,J\,. \tag{40}$$

Das Integral J (39) kann auf folgende Weise ermittelt werden. Setzt man

$$y = \left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3 \exp\left(\frac{3\varepsilon_a}{2}\right)}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^3\left[\exp\left(\frac{3\varepsilon_a}{2}\right) - 1\right]}\right)^{1/n} \tag{41}$$

dann wird

$$J = \frac{2n}{3}\int_{y_1}^{y_2} \frac{(1-y)^n}{(1-y^n)}\,\frac{dy}{y}\,, \tag{42}$$

wobei

$$y_1 = (a/b)^{3/n} \tag{43}$$

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 169.

der Grenze 0 und

$$y_2 = \left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3 \exp\left(\frac{3\,\varepsilon_a}{2}\right)}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 \left[\exp\left(\frac{3\,\varepsilon_a}{2}\right) - 1\right]} \right)^{1/n} \tag{44}$$

der Grenze ε_a in Gleichung (39) entspricht.

Beschränkt man die Werte für n auf ganze positive Zahlen, dann läßt sich das Integral in die folgende binomische Reihe entwickeln:

$$J = \frac{2\,n}{3} \int_{y_1}^{y_2} \frac{-1}{y^n - 1} \sum_{m=-1}^{n-1} \binom{n}{m+1} y^{m+1} \frac{dy}{y} . \tag{45}$$

Das Integral kann nun Glied für Glied berechnet werden. Jedes Glied ist von der Art

$$J_m = -\binom{n}{m+1} \int_{y_1}^{y_2} \frac{y^m}{y^n - 1}\, dy \tag{46}$$

und ergibt[1]

$$J_m = -\binom{n}{m+1} \left(\frac{1}{n} \ln (y-1) + \frac{(1-s)\,(-1)^{m+1}}{n} \ln (y+1) + \frac{2}{n} \sum_{\nu=1}^{\varrho-1} \left(R_\nu \cos \frac{2\,\nu\,(m+1)\,\pi}{n} - S_\nu \sin \frac{2\,\nu\,(m+1)\,\pi}{n} \right) \right) \Bigg|_{y_1}^{y_2} \tag{47}$$

mit $n = 2\,\varrho - s$, $\quad s = 0$ oder 1, $\quad n > 2$

$m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$

und

$$R_\nu = \frac{1}{2} \ln \left[y^2 - 2\,y \cos \frac{2\,\nu\,\pi}{n} + 1 \right], \qquad S_\nu = \operatorname{arc\,tg} \frac{y - \cos\left(\frac{2\,\nu\,\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\,\nu\,\pi}{n}\right)} . \tag{48}$$

Für $m = -1$ wird das Integral (46)

$$J_m = J_{-1} = -\frac{1}{n} \ln \frac{y^n}{y^n - 1} \Bigg|_{y_1}^{y_2} . \tag{49}$$

Wenn man die Integrationen nach Gleichungen (47) und (48) so oft wie nötig durchführt und die Ergebnisse addiert, so ergibt sich

$$J = \frac{2\,n}{3} \left\{ \frac{1}{n} \ln \frac{y^n - 1}{y^n} - \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m+1} \left[\frac{1}{n} \ln (y-1) + \frac{(1-s)\,(-1)^{m+1}}{n} \ln (y+1) + \frac{2}{n} \sum_{\nu=1}^{\varrho-1} \left(R_\nu \cos \frac{2\,\nu\,(m+1)\,\pi}{n} - S_\nu \sin \frac{2\,\nu\,(m+1)\,\pi}{n} \right) \right] \right\} \Bigg|_{y_1}^{y_2} , \tag{50}$$

wobei $n > 2$ und eine ganze Zahl, y, y_1 und y_2 durch (41), (43) und (44), m, ϱ, s, R_ν und S_ν durch (48) gegeben sind. Für den Fall, daß $n \leqq 2$ ist, läßt sich das Integral (42) auf andere, in jeder Integraltafel auffindbare Formeln auswerten. Der aus (50) erhaltene Wert für J muß in (40) eingesetzt werden, um eine Beziehung zwischen Kriechdehnung und Zeit zu erhalten.

b) Dickwandiger Zylinder. Für den dickwandigen Zylinder erhält man an Stelle von Gleichung (40)

$$t = \frac{n^n}{\sqrt{3}^{\,n} A\, p^n}\, I \tag{51}$$

[1] *W. Gröbner* u. *N. Hofreiter*, Integraltafel, Erster Teil, Seite 18. Wien und Innsbruck 1949.

mit

$$I = \frac{n}{\sqrt{3}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(1-x)^n}{(1-x^n)} \frac{dx}{x} \tag{52}$$

und

$$x_1 = \left(\frac{a}{b}\right)^{2/n} \tag{53}$$

$$x_2 = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 \exp\left(\sqrt{3}\,\varepsilon_a\right)}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left[\exp\left(\sqrt{3}\,\varepsilon_a\right) - 1\right]}. \tag{54}$$

Das Integral (51) läßt sich ähnlich wie Integral (42) lösen.

c) Dünnwandige Kugel. Für die dünnwandige Kugel ergibt sich die Zeit als Funktion der Vergleichsdehnung zu

$$t = \frac{2\left[1 - \exp\left(-\frac{3\,n\,\varepsilon}{2}\right)\right]}{3\,n\,A\left(\frac{a\,p}{2\,h}\right)^n}. \tag{55}$$

d) Dünnwandiger Zylinder. Für den dünnwandigen Zylinder ergibt sich folgende Gleichung:

$$\boxed{t = \frac{1 - \exp\left(-\sqrt{3}\,n\,\varepsilon\right)}{\sqrt{3}\,A\,n\left(\frac{\sqrt{3}\;a\,p}{2\,h}\right)^n}}. \tag{56}$$

e) Zugstab. Für den Zugstab ist[1]

$$\boxed{t = \frac{1 - \exp\left(-n\,\varepsilon\right)}{n\,A\,p^n}}. \tag{57}$$

Die Gleichungen (55), (56) und (57) ergeben sich als Lösung der Differentialgleichungen (32), (33) und (34), die entstehen, wenn σ durch $A^{-1/n}\,\dot{\varepsilon}^{1/n}$ aus (35) ersetzt wird.

6. Versagenszeit. Die Versagenszeit t_v sei festgelegt als die Zeitspanne zwischen dem Beginn des Kriechens (bei dem $\varepsilon = 0$ und $t = 0$) und dem Erreichen einer unendlichen Formänderung (gegeben durch $\varepsilon = \infty$ und $t = t_v$).

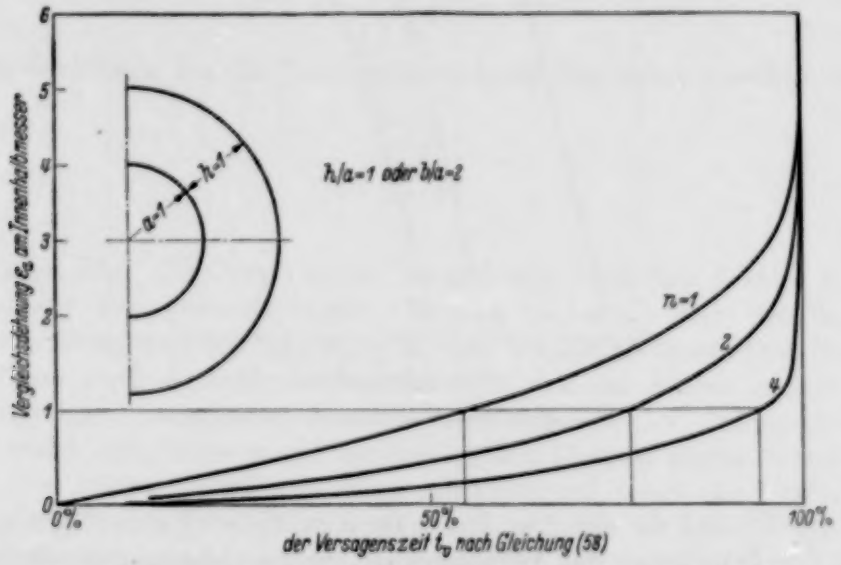

Abb. 4. Verformung einer dickwandigen Kugel in Abhängigkeit von der Zeit.

a) Dickwandige Kugel. Die Beziehung zwischen der Vergleichsdehnung ε_a am Innenhalbmesser und der Zeit ist in (40) gegeben. In Abb. 4 sind Kurven — Vergleichsdehnung ε_a gegen Zeit t — aufgetragen. Aus ihnen ist ersichtlich, daß die Zeit, in welcher Bruch zu erwarten ist

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 169.

(Bruchzeit) und die Zeit, für die $\varepsilon_a = \infty$ ist (Versagenszeit t_v) so nahe beieinanderliegen, daß die Zeit zum Bruch genügend genau durch die Versagenszeit angenähert werden kann. Nimmt man zum Beispiel an, daß Bruch eintritt wenn $\varepsilon_a = 1{,}0$ ist, dann ist die Bruchzeit 54% der Versagenszeit für $n = 1$, 77% für $n = 2$, und 94% für $n = 4$. Je größer n, desto besser ist die Annäherung.

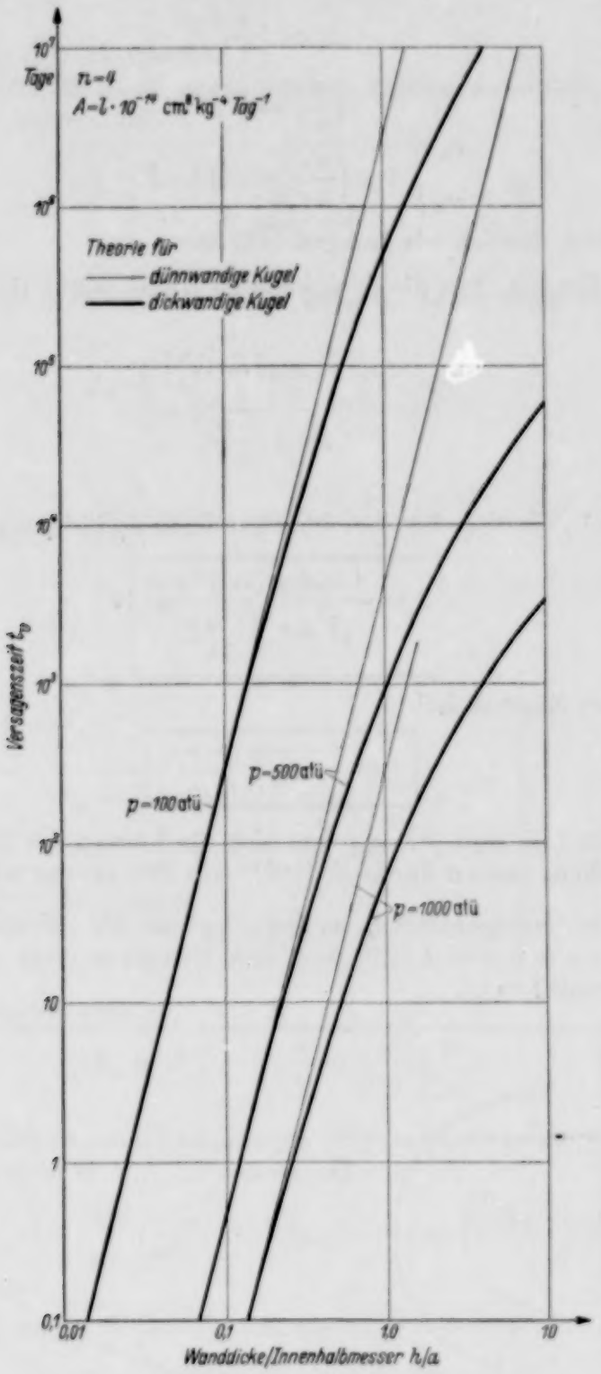

Abb. 5. Versagenszeit für Kugel unter Innendruck.

Wenn man nun bedenkt, daß die üblichen Werte für n im Kriechgesetz (35) 4 und größer sind, dann ist der Fehler bei der Benutzung der Versagenszeit zur Bestimmung der Bruchzeit, für den Fall, daß die *Ludwik*-Dehnung beim Bruch $\varepsilon_a = 1.0$ ist, ungefähr 6% oder weniger. Die Versagenszeit kann also gut für die Bestimmung der Bruchzeit verwendet werden. Für sie ergibt sich aus (40) für die Versagenszeit

$$t_v = \frac{2^n}{3^n} \frac{n^n}{A\, p^n} J_v \,, \tag{58}$$

wobei

$$J_v = \int_0^\infty \left[\left(1 - \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3 \exp\left(\frac{3\,\varepsilon_a}{2}\right)}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 \left[\exp\left(\frac{3\,\varepsilon_a}{2}\right) - 1\right]} \right)^{1/n} \right]^n , \tag{59}$$

was nach Einführen der Veränderlichen y (41), die folgende Form annimmt:

$$J_v = \frac{2\,n}{3} \int_{(a/b)^{3/n}}^{1} \frac{(1-y)^n}{(1-y^n)} \frac{dy}{y} . \tag{60}$$

Kurven für die Versagenszeit t_v in Abhängigkeit vom Wanddickenverhältnis h/a sind in Abb. 5 gezeigt für die dort angegebenen Kriechkonstanten.

b) Dickwandiger Zylinder. Die Versagenszeit für den dickwandigen Zylinder ist gemäß (51)

$$t_v = \frac{n^n}{\sqrt{3}^{\,n} A\, p^n} I_v \tag{61}$$

mit

$$I_v = \frac{n}{\sqrt{3}} \int_{(a/b)^{2/n}}^{1} \frac{(1-x)^n}{(1-x^n)} \frac{dx}{x} . \tag{62}$$

c) Dünnwandige Kugel. Für die dünnwandige Kugel ergibt sich die Versagenszeit aus (55) indem man $\varepsilon = \infty$ setzt, zu

$$t_v = \frac{2\,(2\,h)^n}{3\,n\,A\,(a\,p)^n} . \tag{63}$$

Gleichung (63) ist ebenfalls in Abb. 5 graphisch dargestellt.

d) Dünnwandiger Zylinder. Für den dünnwandigen Zylinder erhält man die Versagenszeit indem man $\varepsilon = \infty$ in Gleichung (56) einsetzt:

$$t_v = \frac{(2\,h)^n}{\sqrt{3}\;n\,A\,(\sqrt{3}\;a\,p)^n} . \tag{64}$$

e) Zugstab. Die Gleichung für die Versagenszeit eines Zugstabes unter konstanter Last wird zufolge (57)

$$t_v = \frac{1}{n\,a\,p^n} . \tag{65}$$

7. Schlußbemerkung. Eine Hohlkugel unter Innendruck wird, wie bereits erwähnt, natürlich etwas eher bersten als die Versagenszeit angibt. Bersten tritt ein, sobald die Wanddicke so klein und die Belastung so groß ist, daß die Spannung in dem Werkstoff diesen zum Bruch bringt.

Die Versagenszeit ist auch dadurch beeinflußt, daß sich die Kugel infolge unvermeidlicher Umstände, wie Ausmittigkeit, ungleiche Wanddicke, Werkstoffehler, Inhomogenität und Anisotropie, nicht symmetrisch ausdehnen wird, wie das in der Theorie angenommen ist. Die soeben erwähnten Fehlerquellen treten jedoch erst dann merklich auf, wenn die Verformung dem Ende zugeht und zu einer Zeit die der Versagenszeit so nahe liegt, daß ihr Einfluß auf das Endergebnis als unbedeutend angenommen werden kann.

8. Zusammenfassung. Durch die Verwendung von *Ludwik*-Dehnungen und -Spannungen ist es in einigen Fällen möglich, eine Bestimmung der Zeit bis zum Bruch eines kriechenden Werkstückes auszuführen. Zu den Fällen, in denen sich eine solche Bestimmung durchführen läßt, gehören Hohlkugel und Hohlzylinder unter Innendruck sowie der einfache Zugstab. In dem vorliegenden Aufsatz ist der Fall einer hohlen, dickwandigen Kugel unter Innendruck ausführlich be-

handelt und sind die Endergebnisse für den dickwandigen Zylinder, die dünnwandige Kugel und den dünnwandigen Zylinder sowie den Zugstab kurz angeführt.

Der Grundgedanke der hier entwickelten Theorie ist, die Dehnung in den Kriechgleichungen nach unendlich gehen zu lassen. Die Zeitspanne, in der eine unendliche Verformung erreicht wird, ist Versagenszeit genannt worden. Es wird gezeigt, daß die Verformung am Ende so ungeheuer schnell vor sich geht, daß die Zeitspanne, um enendliche Dehnung zu erreichen (Versagenszeit), und die Zeit bis zum tatsächlichen Bruch (Bruchzeit) nur geringfügig voneinander abweichen, und daß daher die Versagenszeit zur Bestimmung der Bruchzeit verwendet werden kann.

(Eingegangen am 14. August 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Ing. *Friedrich Rimrott*, University Park, Pa. (USA), Pennsylvania State University, Abt. für Technische Mechanik (Prof. Dr. *Marin*).

Thermal stresses in a heat-generating cylinder: The variational solution of a boundary layer problem in three-dimensional elasticity

By **G. Horvay, I. Giaever,** and **J. A. Mirabal**

1. Introduction. When self-equilibrating radially symmetric normal and shear tractions $s_k(r)$, $t_k(r)$ act on an end-face of a cylinder, the ensuing stresses and displacements are concentrated in a thin boundary layer of the cylinder, about two radii deep. The stress distribution may be calculated by using a pair of *Sadowsky-Sternberg* axisymmetric stress functions $\varphi_k(z, r)$, $\Phi_k(z, r)$ which identically satisfy the equilibrium equations. We write φ_k, Φ_k as products, $g_k(z)\, f_k(r)$, $G_k(z)\, F_k(r)$, where $f_k(r)$, $F_k(r)$ are polynomials of degree $k+2$ ($k = 2, 4, 6, \ldots$) which satisfy certain boundary conditions and orthogonality relations; their appropriate derivatives constitute the two complete sets of end tractions $s_k(r)$ and $t_k(r)$. The axial functions $g_k(z)$, $G_k(z)$ — decaying with distance from the loaded end as $e^{-\alpha_k z}$, where α_k is the real part of an eigenvalue parameter γ_k — are determined from *Euler-Lagrange* equations. It is found that the variational approach used in this fashion leads to displacements in the fundamental mode which satisfy the compatibility requirements within, almost, graph paper accuracy. The theory developed is applied to determining the stresses in a cylinder of unit radius and axial length L greater than five radii, when a radial temperature distribution $\Theta = \Theta_M\,(1 - r^2)$ is maintained. The surprising result is obtained that the maximum stress in the cylinder, a longitudinal stress $\sigma_z = \pm\, 0.501\, E\,\alpha\,\Theta_M/(1-\nu)$ (plus at $r = 1$, minus at $r = 0$), develops at a relatively large distance, 2.3 radius, away from an end-face. This barely exceeds the value $\pm\, 0.500\, E\,\alpha\,\Theta_M/(1-\nu)$ which prevails throughout the remainder of the cylinder $2.5 \lesssim z \lesssim L - 2.5$.

2. The Rigorous Solution, using potential Functions. We are considering the problem of determining the stress distribution in an elastic cylinder which is free from tractions on its curved surface:

$$\tau(z, 1) = 0\,, \tag{1a}$$

$$\sigma_r(z, 1) = 0 \tag{1b}$$

and is subject to radially symmetric shear end tractions $\tau^\circ(r)$ and normal end tractions $\sigma_z^\circ(r)$ which are self-equilibrating, i. e., which satisfy

$$\int_0^1 \sigma_z^\circ(r)\, r\, dr = 0\,. \tag{1c}$$

We refer to this problem as the "end problem". The symbols σ_z, σ_r, σ_θ denote the axial, the radial and the hoop stress components, τ is the zr shear stress, and w and u the axial and radial displacements (see Fig. 1). We use the cylinder radius as the distance unit, the double shear modulus as the stress unit. We use the word "traction" in the sense of "boundary stress". The superscript $^\circ$ refers to the $z = 0$ cross section. If, as we assume, the length of the cylinder exceeds four, the interaction of the effects at the two ends may be neglected, and the cylinder may be regarded assemi-infinite.

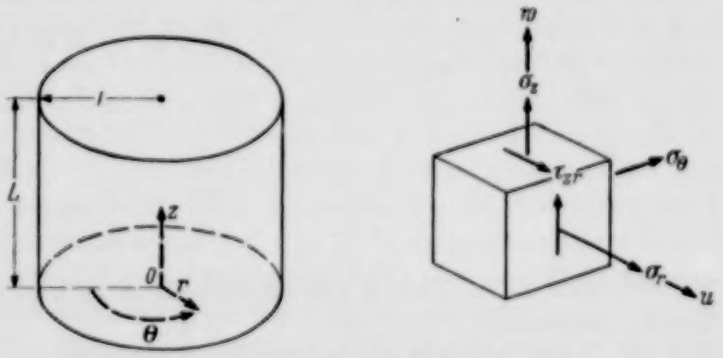

Fig. 1. The cylinder.

In a previous paper[1] — to be referred to hereafter as **I** — it was shown that the *Sadowsky-Sternberg* stress functions $\varphi(z, r)$, $\Phi(z, r)$ are ideally suited for solution of the axisymmetric "end problem."[2] Indeed, on

[1] *G. Horvay* and *J. A. Mirabal*, The End Problem of Cylinders, J. Appl. Mechanics 25 (1958), p. 561.

[2] A more conventional approach is to use a "Love" function (see *H. Poritsky* and *M. F. Bolster*, Thermal Stresses in Cylinders, GE Report GE-DF-52 GL 128, and Refs. 3—5 of I). While, naturally, both methods lead to the same rigorous solution problem, only the *Sadowsky-Sternberg* functions are adaptable to a variational approach.

writing

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \nabla^2\varphi - \varphi_{rr} + (1-2\nu)\,\Phi_{zz} + r\,\Phi_{zzr}\,,\\
\sigma_\theta &= \nabla^2\varphi - \frac{1}{r}\varphi_r + (1-2\nu)\,\Phi_{zz},\\
\sigma_z &= \nabla^2\varphi - \varphi_{zz} - (4-2\nu)\,\Phi_{zz} - r\,\Phi_{zzr} + \left(4-2\nu+r\frac{\partial}{\partial r}\right)\nabla^2\Phi,\\
\tau &= -\varphi_{zr} + r\,\Phi_{zzz} - 2\,(1-\nu)\,\Phi_{zr} - r\,\nabla^2\Phi_z
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

it is found that the equilibrium equations

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau}{\partial z} + \frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r} &= 0\,,\\
\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

are identically satisfied[1]. One also notes that the stress Expressions (2) do not depend explicitly[2] on z. On writing the product function representations

$$\varphi(z,r) = g(z)\,f(r)\,, \qquad \Phi(z,r) = G(z)\,F(r)\,. \tag{4}$$

and introducing the notation

$$g' \equiv \frac{dg}{dz}, \qquad f' \equiv \frac{df}{dr}\ \text{etc.}, \tag{5a}$$

$$t_f \equiv f'\,, \qquad t_F \equiv r\,F'' + (3-2\nu)\,F'\,, \tag{5b}$$

$$s_f \equiv t_f' + \frac{t_f}{r}, \quad s_F \equiv t_F' + \frac{t_F}{r} \tag{5c}$$

the stress expressions become

$$\sigma_r = f g'' + \frac{1}{r} f' g + [r\,F' + (1-2\nu)\,F]\,G''\,, \tag{6a}$$

$$\sigma_\theta = f g'' + f''\,g + (1-2\nu)\,F\,G''\,, \tag{6b}$$

$$\sigma_z = s_f\,g + s_F\,G\,, \tag{6c}$$

$$t = -t_f\,g' - t_F\,G'\,. \tag{6d}$$

The next objective is to determine φ and Φ so that the stress-strain relations (the "compatibility" relations)

$$(1+\nu)\frac{\partial u}{\partial r} = \sigma_r - \nu\,(\sigma_\theta + \sigma_z)\,, \tag{7a}$$

$$(1+\nu)\frac{u}{r} = \sigma_\theta - \nu\,(\sigma_z + \sigma_r)\,, \tag{7b}$$

$$(1+\nu)\frac{\partial w}{\partial z} = \sigma_z - \nu\,(\sigma_r + \sigma_\theta)\,, \tag{7c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 2\,\tau \tag{7d}$$

be also satisfied. This is accomplished, as is well known, by choosing the functions φ, Φ as harmonic functions

$$\nabla^2\varphi = 0\,, \qquad \nabla^2\Phi = 0 \tag{8}$$

[1] In their original form, as given by *Sadowsky–Sternberg* (Lecture Notes on Three Dimensional Elasticity, by *M. A. Sadowski*, unpublished), the ∇^2 terms were absent from (2), and hence (3) was satisfied only on condition that (8) hold. The ∇^2 terms necessary to insure satisfaction of (3) without the requirements (8) were first introduced in **1**.

[2] This as will be shown, insures an exponential decay of the stresses with z. The more familiar Boussinesq representation of the stresses involves z explicitly. It is therefore unsuitable for the treatment of the "end problem", even after appropriate ∇^2 terms have been incorporated in the stress expressions, so that (3) be satisfied. However, the Boussinesq representation is the proper one to use if the lateral surface of the cylinder is loaded by self-equilibrating tractions $\sigma_r(z, 1)$, $\tau(z, 1)$ and the end-faces $z = 0$, L are free.

and defining the displacements by

$$u = -\varphi_r + r\,\Phi_{zz}\,, \qquad w = -\varphi_z - r\,\Phi_{zr} - 4\,(1-\nu)\,\Phi_z\,. \tag{9}$$

We are interested in exponentially decaying solutions[1] of (3) and (7), i. e., of (8). Such are φ, Φ where

$$g(z) = G(z) = e^{-\gamma z}, \qquad f(r) = J_0(\gamma\, r)\,, \qquad F(r) = B\,J_0(\gamma\, r)\,. \tag{10}$$

It is seen that the ensuing stresses σ_r, σ_θ, σ_z are even function in r, τ is an odd function. The choice

$$B = -\frac{J_1(\gamma)}{\gamma\,J_0(\gamma) + 2\,(1-\nu)\,J_1(\gamma)} \tag{11}$$

insures that the boundary conditions (1a, c) are satisfied[2], and the choice of γ as the root of

$$\frac{J_0^2(\gamma)}{J_1^2(\gamma)} = -1 + 2\,\frac{1-\nu}{\gamma^2} \tag{12}$$

insures that the condition (1b) are also satisfied. We denote the roots

$$\gamma_k = \alpha_k + i\,\beta_k \tag{13a}$$

which have positive real and imaginary parts by $\gamma_2, \gamma_4, \ldots$ *Poritsky* found that[3]

$$\gamma_2 = 2.72212 + i\;1.36209\,, \tag{13b}$$

$$\gamma_4 = 6.05962 + i\;1.63791\,. \tag{13c}$$

It is seen that $-\gamma_k$ and $\pm\gamma_{k,\,conj}$ are also roots. The functions φ and Φ associated with γ_k are denoted by φ_k, Φ_k. Because γ_k is a complex number, φ_k and Φ_k are complex functions. Their real and imaginary parts ($\Re$ and $\Im$) individually satisfy (3) and (7).

3. The variational method. Through Expressions (10)—(13) we have acquired two infinite families of stress function pairs which identically satisfy Eqs. (3) and (7). These are the real parts of φ_k and Φ_k, and the imaginary parts of φ_k and Φ_k. These functions may be adapted to solution of the end problem: the determination of the stress distribution in the cylinder under given self-equilibrating end tractions. One only has to take suitable linear combinations of the stress function pairs, so that their appropriate derivatives reduce to (or approximate) the given end tractions, and thenone obtains an exact (or an approximate) solution to the end problems.

But the use of the functions $\Re\,\varphi_k$, $\Re\,\Phi_k$, $\Im\,\varphi_k$, $\Im\,\Phi_k$ encounters great practical difficulties. The *Besse* functions of complex arguments are inadequately tabulated. Furthermore, the functions φ_k, Φl_k are not bonafide product functions: their product nature disappears on taking real and imaginary parts. Because of this, the functions give rise to both $\sigma_z^\circ(r)$ and $\tau^\circ(r)$ boundary stresses, which are hopelessly intermingled: ordinary *Fourier* expansion methods for representing given boundary tractions in terms of characteristic tractions $s_k(r)$, $t_k(r)$ do not apply.

By sacrificing the requirement (8) for harmonicity we may salvage both the bonafide product representation (4) of the stress functions, and the method of individual *Fourier* expansion for each end traction $\sigma_z^\circ(r)$ and $\tau^\circ(r)$. This is accomplished by the use of the variational method, to which we now proceed. The functions φ_k, Φ_k we shall define presently automatically satisfy the equilibrium equations (3), but only approximately the compatibility equations (7). Indeed, the quality of the variational approximation may be judged by the degree of adherence to the compatibility conditions (7). When the variational stress functions φ_k, Φ_k are introduced into (7), and the radial displacements u, as determined from (7a) and (7b), respectively, are found to be barely distinguishable, and the axial displacements w determined from (7c) and (7d), respectively, are likewise found to be barely distinguishable, then we may regard our solution φ_k, Φ_k an excellent approximation. If the agreement is only fair in the displacements, the average of the two displacement determinations may still be quite representative, and the stresses may still be quite reliable. If the agreement of the displacements, calculated by the two procedures, is poor, then the stress distribution may be judged as having only qualitative usefulness.

---

[1] There exist also solutions with $e+\gamma z$ variation. They enter the analysis only in cases where the cylinder is so short ($L \lesssim 4$) that the interaction of the effects from the two end-faces cannot be ignored.

[2] In fact, etc. $\int_0^1 \sigma_z(r)\,r\,dr = 0$ is satisfied for all z.

[3] All numerical results stated in this report are based on a value of the Poisson ratio $\nu = 0.3$.

We shall show that the approximation of 1, based on the assumption

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Method A: either} & \varphi = 0\,, & \Phi = G(z)\,F(r) \\ \text{or} & \varphi = g(z)\,f(r), & \Phi \equiv 0 \end{array}\right\} \tag{14a}$$

belongs into the last category, the approximation based on the assumption

$$\text{Method B:}\quad \varphi = G(z)\,f(r)\,, \qquad \Phi = G(z)\,F(r) \tag{14b}$$

(i. e., $g \equiv G$) belongs (for the fundamental traction) into the intermediate category, and

$$\text{Method C:}\quad \varphi = g(z)\,f(r)\,, \qquad \Phi = G(z)\,F(r) \tag{14c}$$

(with the g, G relation established by the calculus of variations) belongs into the first category for the fundamental normal traction, and into the second category for the fundamental shear traction.

As an illustration — and in anticipation of the results to be arrived at in this report — we compare in Fig. 2(a) the variationally determined end-face hoop stress $\sigma_\theta^\circ(r)$, produced by the "fundamental normal traction mode"

$$\sigma_z^\circ(r) = 2\,r^2 - 1\,, \qquad \tau^\circ(r) = 0 \tag{15}$$

with the rigorous solution of (2), (7) which *Poritsky* obtained when he used a slightly modified set of boundry aconditions.[1] The boundary tractions (15) and *Poritsky's* modified tractions are illustrated in Fig. 2(b). It is clearly difficult to judge whether the slight discrepancy between the $\sigma_\theta^\circ(r)$

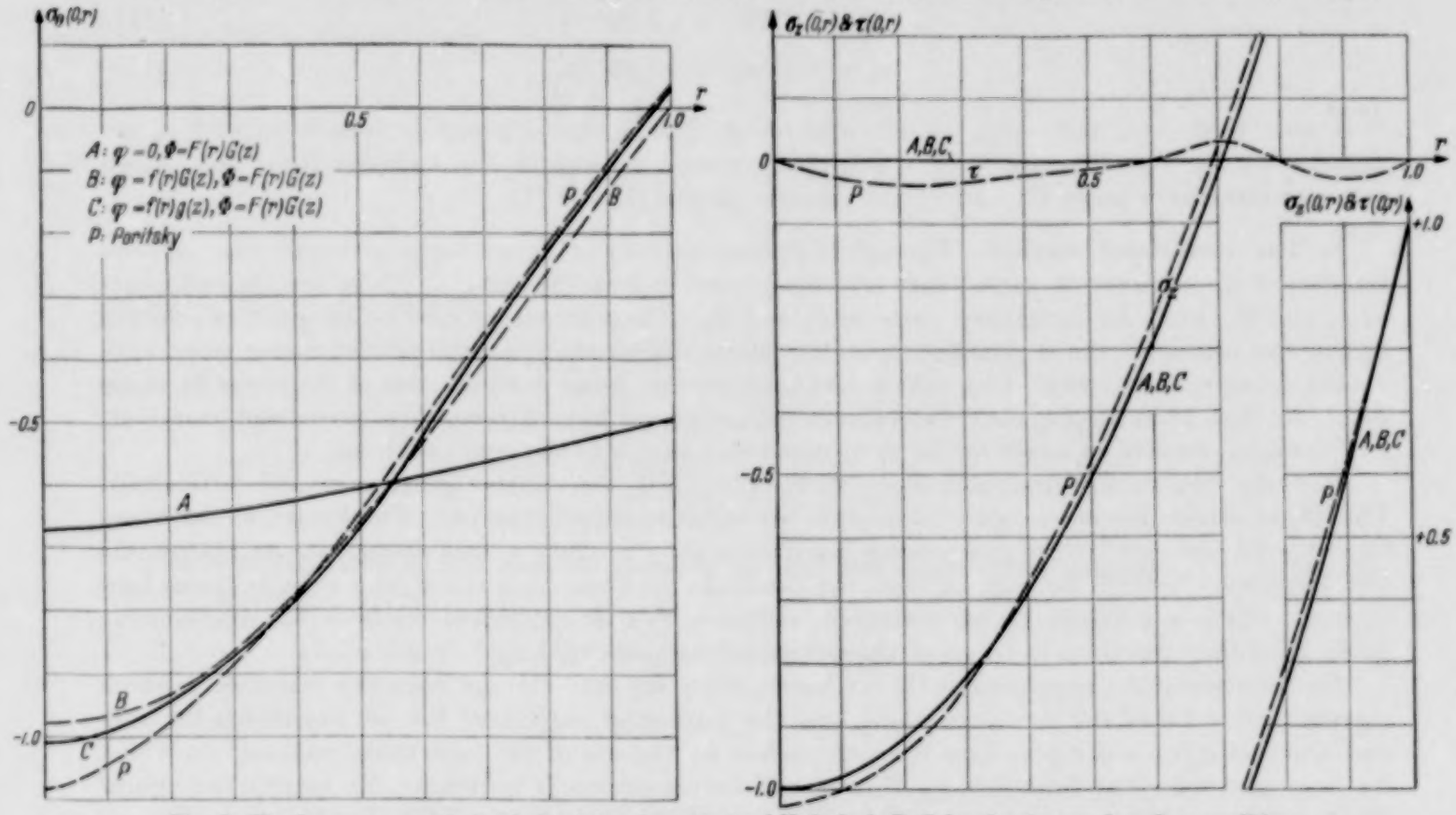

Fig. 2. The hoop stress $\sigma_\theta(0, r)$ calculated by the variational Methods A, B, C for the rigorous boundary conditions $\sigma_z(0, r) = 2\,r^2 - 1$, $\tau(0,r) = 0$, is compared, Diagram (a), with rigorous (*Poritsky*) solution for the approximate boundary conditions illustrated by dashed lines in Diagram (b).

curves C and P should be attributed to the approximate nature of solution C or to the approximate nature of boundary conditions P.

Our variational approach involves the following steps. We introduce the functions (4) into the complementary energy expression

$$U^* = 2\,\pi \int_0^\infty dz \int_0^1 \left[\frac{1}{2\,(1+\nu)}\,(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)^2 - \sigma_r\,\sigma_\theta - (\sigma_r + \sigma_\theta)\,\sigma_z + \tau^2\right] r\,dr \tag{16}$$

[1] In his calculations *Poritsky* employed a biharmonic stress function of form

$$\Phi = (A\,\Re + B\,\Im)\,\mathsf{L}_2 + (C\,\Re + D\,\Im)\,\mathsf{L}_4$$

where L_2, L_4 are the *Love* functions belonging to γ_2, γ_4, and A, B, C, D are coefficients determined by least square fitting of the boundary stresses to the tractions (15).

and, regarding $f(r)$ and $F(r)$ [or, more properly, $f_k(r)$ and $F_k(r)$] as prescribed quantities, we integrate out over the variable r. That gives us

$$\frac{1+\nu}{2\pi} U^* = \int_0^\infty \mathfrak{L}\,(g, g', g''; G, G', G'')\, dz\,, \tag{17a}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} = {} & a_{00} g^2 + a_{11} g'^2 + a_{22} g''^2 + a_{02} g g'' + c_{00} G^2 + c_{11} G'^2 + c_{22} G''^2 + c_{02} G G'' \\ & + b_{00} g G + b_{11} g' G' + b_{22} g'' G'' + b_{02} g G'' + b_{20} g'' G\end{aligned} \tag{17b}$$

where

$$\left.\begin{aligned} a_{00} &= (1-\nu)\int_0^1 s_f^2\, r\, dr\,, \\ a_{11} &= (1+\nu)\int_0^1 t_f^2\, r\, dr\,, \\ a_{22} &= (1-\nu)\int_0^1 f^2\, r\, dr\,, \\ a_{02} &= -(1-3\nu)\int_0^1 t_f^2\, r\, dr\,, \end{aligned}\right\} \tag{18a}$$

$$\left.\begin{aligned} b_{00} &= (1-\nu)\int_0^1 s_f\, s_F\, r\, dr\,, \\ b_{11} &= 2\,(1+\nu)\int_0^1 t_f\, t_F\, r\, dr\,, \\ b_{22} &= (1-\nu)\int_0^1 f\,[r\,F' + 2\,(1-2\,\nu)\,F]\, r\, dr\,, \\ b_{02} &= 2\,\nu\int_0^1 t_f\, t_F\, r\, dr + 2\,\nu\,(1-\nu)\int_0^1 t_f\, F'\, r\, dr\,, \\ b_{20} &= 2\,\nu\int_0^1 t_f\, t_F\, r\, dr\,. \end{aligned}\right\} \tag{18b}$$

$$\left.\begin{aligned} c_{00} &= \frac{1}{2}\int_0^1 s_F^2\, r\, dr\,, \\ c_{11} &= (1+\nu)\int_0^1 t_F^2\, r\, dr\,, \\ c_{22} &= \frac{1}{2}\int_0^1 F'^2\, r^3\, dr + (1-2\,\nu)\,(1-\nu)\int_0^1 F\,[F'\,r + (1-2\,\nu)\,F]\, r\, dr\,, \\ c_{02} &= \nu\int_0^1 t_F^2\, r dr - 2\,\nu^2\int_0^1 t_F\, F'\, r\, dr\,. \end{aligned}\right\} \tag{18c}$$

One notes that the functional $\mathfrak{L}$ in (17a) does not involve z explicitly, so the *Euler* equations derived from (17), whether we place $g \equiv 0$ or $G \equiv 0$ as in Method A, or write $g = G$ as in Method B, or treat $g(z)$ and $G(z)$ independently, as in Method C will be differential equations with constant coefficients. This signifies an exponential variation for the axial functions.

Of great importance in the variational procedure is the judicial choice of the radial polynomials $f_k(r)$, $F_k(r)$ for which the $g_k(z)$, $G_k(z)$ functions are to be determined; or, what amounts to the same thing, the proper choice of the characteristic boundary tractions $s_k(r)$, $t_k(r)$ for which the stress functions $\varphi_k(z, r)$, $\Phi_k(z, r)$ are to be determined; or, what amounts to the same thing, the proper definition of the rule of orthogonalization for the polynomials $f_k(r)$, $F_k(r)$.

4. Method A. The approximation (14a) was carried out in 1. In that paper we recognized that the lowest degree normal traction polynomical (non identically zero) which obeys (1c) is

$$s_2(r) = 2\,r^2 - 1\,. \tag{19a}$$

The subscript $k = 2$ refers to the degree of the $s(r)$ polynomial. We use bold face letters s, t, f, F to indicate that the normalization

$$s_k(1) = 1 \tag{20}$$

is used. Integration of (5c) then gives

$$\mathsf{t}_2(r) = \frac{r^3 - r}{2} \tag{19b}$$

and (19b) is seen, by (6d), to obey (1a). (The integration constant is zero since the shear stress is an odd function of r.) A further integration of (5b) now leads to

$$\mathsf{f}_2(r) = \frac{1}{8}(1 - r^2)^2 \tag{21}$$

for the case $\Phi \equiv 0$, and to

$$\mathsf{F}_2(r) = \frac{8 - 9\nu + 2\nu^2}{16(1 - 2\nu)(3 - \nu)(2 - \nu)} - \frac{r^2}{8(2 - \nu)} + \frac{r^4}{16(3 - \nu)} \tag{22a}$$

or

$$\mathsf{F}_2(r) = \frac{1}{43.2}[r^4 - 3.176471\, r^2 + 8.058823] \tag{22b}$$

for the case $\varphi = 0$. [The integration constant is determined by the boundary condition (1b).]

Introducing (19), (21), (22) into the strain energy expression (17) there results an *Euler* differential equation of the form[1]

$$\mathfrak{A}\, g^{\mathrm{IV}} - \mathfrak{B}\, g'' + \mathfrak{C}\, g = 0\,. \tag{23}$$

Its solution may be written as

for $\sigma_z^\circ(r) =$ given, $\tau^\circ(r) = 0$: $$g(z) = e^{-\alpha z}\left(\cos\beta z + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta z\right), \tag{24a}$$

for $\tau^\circ(r) =$ given, $\sigma_z^\circ(r) = 0$: $$h(z) = e^{-\alpha z}\frac{\sin\beta z}{\beta} \tag{24b}$$

where

$$\gamma_2 = \alpha_2 + i\,\beta_2 = 2.9150 + i\,1.3530\,, \tag{25a}$$

when the function $\varphi = g_2 f_2$ is used, and

$$\gamma_2 = \alpha_2 + i\,\beta_2 = 2.6914 + i\,1.3351\,, \tag{25b}$$

when the function $\Phi = G_2 F_2$ is used. [Write in (24) G and H instead of g and h.] It is noted that[2]

$$g(0) = 1\,, \qquad g'(0) = 0\,, \tag{26a}$$

$$h(0) = 0\,, \qquad h'(0) = 1\,. \tag{26b}$$

The above eigenvalues (25a, b) are quite close to the correct one (13a), especially the one based on Φ_2. This encourages us to believe that the stress distribution derived from Φ_2 will also be close to the correct stress distribution. The stresses derived from $G_2 F_2$ were calculated and plotted in **1**, and so were the end-face displacements

$$u_{\mathrm{I}}(r) \equiv \frac{1}{1+\nu}\int_0^r [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)]_{z=0}\, dr\,, \tag{27a}$$

$$u_{\mathrm{II}}(r) \equiv \frac{1}{1+\nu}\, r\,[\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_r)]_{z=0}\,, \tag{27b}$$

$$w_{\mathrm{III}}(r) \equiv \frac{1}{1+\nu}\int_\infty^0 [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)]\, dz\,, \tag{27c}$$

$$w_i(r) \equiv w_{\mathrm{III}}(0) + \int_0^r \left[2\tau - \frac{\partial u_i}{\partial z}\right]_{z=0} dr \qquad (i = \mathrm{I}, \mathrm{II})\,. \tag{27d}$$

[1] The detailed expressions for the coefficients $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, and $\mathfrak{C}$ are given in **1**. For the sake of simpler notation, we shall frequently omit the subscript k of f, A, g, α, etc.

[2] In general discussion, and in the specific case of normal boundary tractions, we use the symbols g and G for the z-function. In the specific case of loading by shear tractions we use the symbols h and H. *Frequently* we make a statement only about g or h when it is obvious, as in (26), that corresponding statements apply also to G and H.

There is no direct way of judging the reliability of the stress results. But the displacements may be judged, and they were found to be disappointing. They were found to have the ranges

$$\left.\begin{aligned} u_{\mathrm{I}}(0) &= 0\,, & u_{\mathrm{I}}(1) &= -0.62\,,\\ u_{\mathrm{II}}(0) &= 0\,, & u_{\mathrm{II}}(1) &= -0.03\,,\\ w_{\mathrm{I}}(0) &= 0.57\,, & w_{\mathrm{I}}(1) &= -0.50\,,\\ w_{\mathrm{II}}(0) &= 0.57\,, & w_{\mathrm{II}}(1) &= -0.01\,,\\ w_{\mathrm{III}}(0) &= 0.57\,, & w_{\mathrm{III}}(1) &= -0.57\,. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Equations (28) show that the various methods of displacement determination are quite inconsistent. One may regard the averages

$$\frac{1}{2}(u_{\mathrm{I}} + u_{\mathrm{II}})\,, \qquad \frac{1}{3}(w_{\mathrm{I}} + w_{\mathrm{II}} + w_{\mathrm{III}}) \tag{29}$$

as perhaps representative of the true displacements; but the deviation of u_{I} or u_{II} from such an average is probably indicative also of the deviation of the calculated stresses from the true ones; and the indicated deviations are excessive, even in an engineering approximation. Instead of plotting similar graphs also for the function φ_2, or investigating, similarly, the higher modes, it looked more promising to preceed to the approximation B.

5. Method B. We assume that

$$g(z) \equiv G(z)\,. \tag{30}$$

For radial functions f_2, F_2 we now choose

$$f_2 = k\,\mathsf{f}_2\,, \qquad F_2 = (1-k)\,\mathsf{F}_2 \tag{31}$$

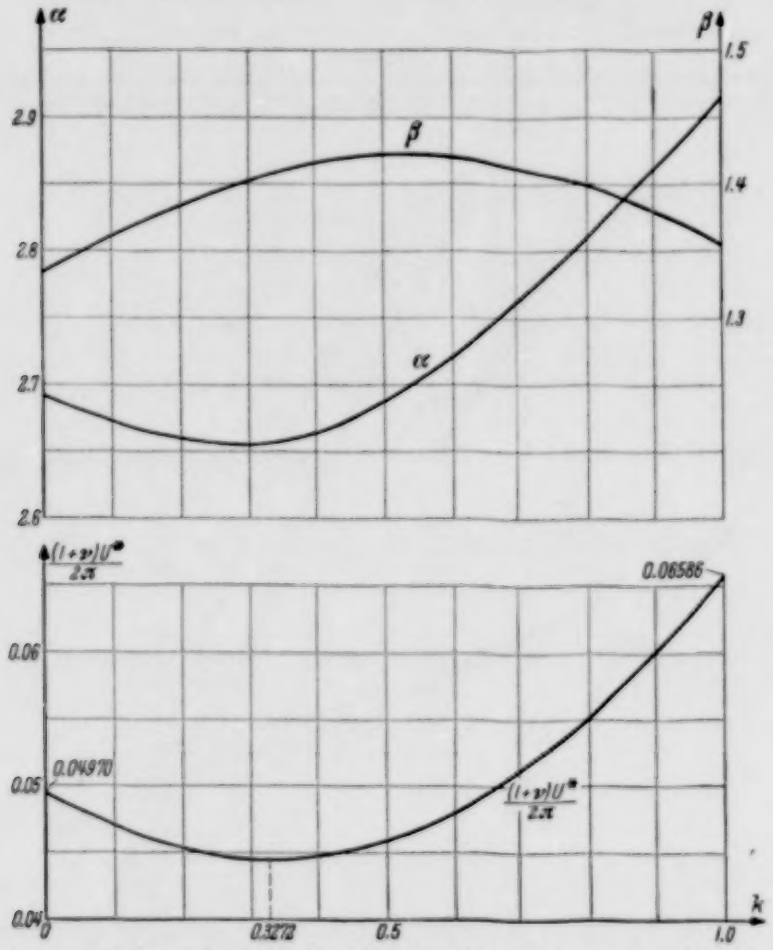

Fig. 3. Variation, with factor k, of the eigenvalue $\alpha_2 + i\,\beta_2$ and the corresponding complementary energy U^*, when the stress function pair $\varphi = k\,G_2(z)\,\mathsf{f}_2(r)$, $\Phi = (1-k)\,G_2(z)\,\mathsf{F}_2(r)$ is used.

where f_2, F_2 are given by (21), (22). Then the boundary traction, see equations (6c, d), is still

$$\sigma_z^\circ(r) = \mathsf{s}_2(r) = 2\,r^2 - 1\,, \qquad \tau^\circ(r) = 0 \tag{32}$$

when $G(0) = 1$, $G'(0) = 0$. In Fig. 3 of this paper are plotted the variation of U^*, α_2, β_2 with k. It is seen that the energy is minimum

$$\frac{1+\nu}{2}\,U^*_{min} = 0.044626 \tag{33a}$$

at

$$k = 0.3272 \tag{33b}$$

(Note also that the α_2 minimum occurs somewhat to the left of $U^*_{min.}$)[1] One notices also, with considerable surprise, that the new eigenvalue

$$\gamma_2 = 2.6564 + i\ 1.4067 \tag{34}$$

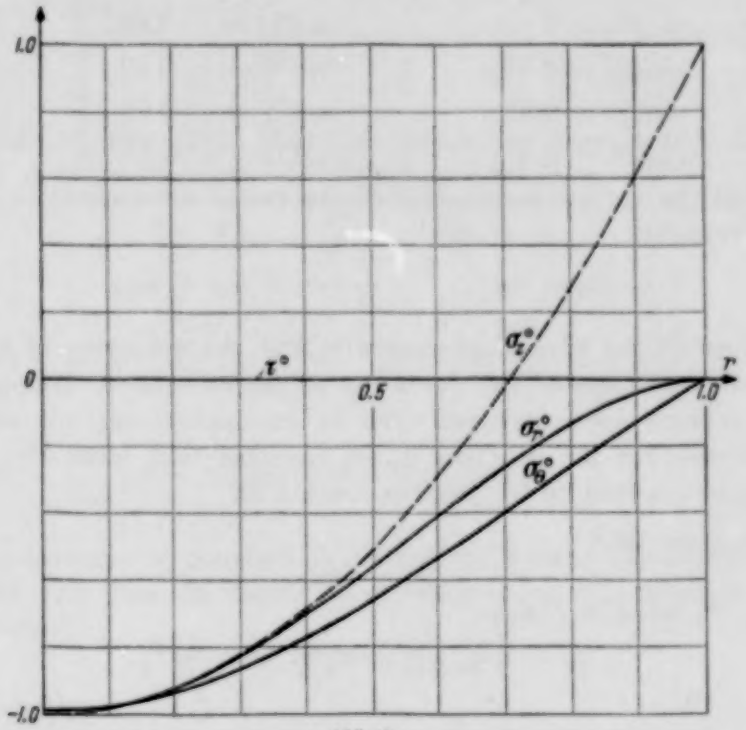

Abb. 4a.

Fig. 4a—b. End-face stresses and displacements, calculated by variational Method B, for loading of cylinder by end traction $\sigma_z^\circ(r) = s_3(r) = 2r^3 - 1$. u_I, u_{II}, w_I, w_{II}, u_{III}, w_v, w_ϑ are based on Eqs. (27), (9).

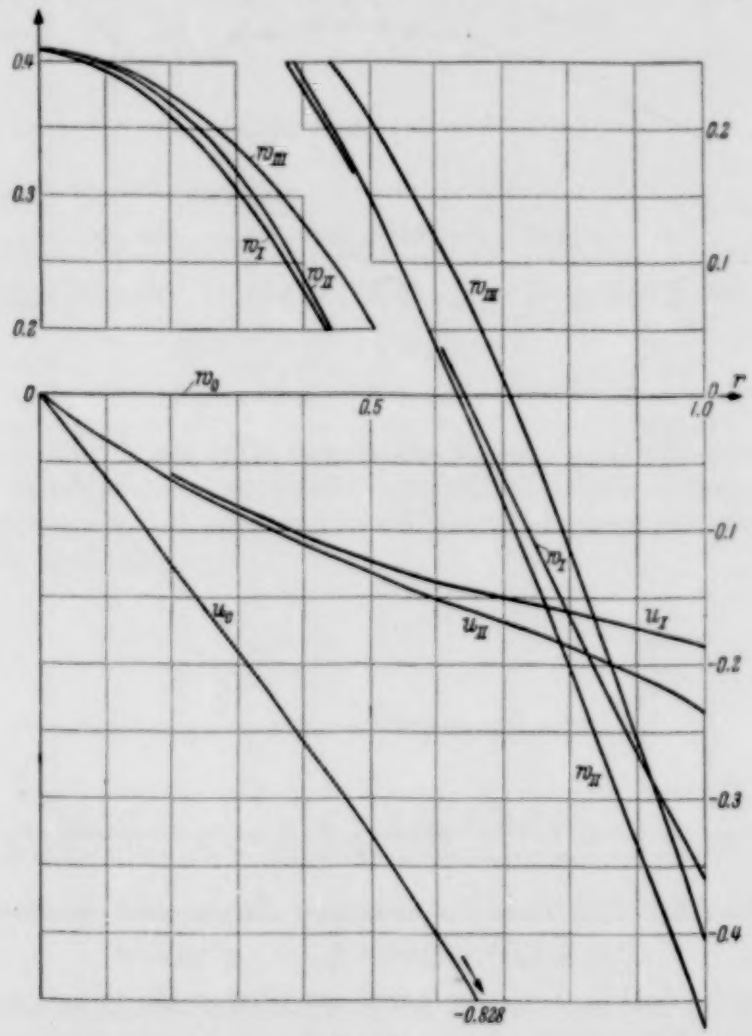

Abb. 4b.

[1] A similar determination of the best k may also be made for shear loading by traction $t_2 = (1/2)(r^3 - r)$. This determination has been carried out only for $k = 0$ and $k = 1$, and it was found that $(1 + \nu)\, U^*/2\pi = 0.005506$, 0.006377, respectively.

is an inferior approximation to (13a) than is (25b), in spite of the fact the present solution is a much better solution — as judged by the compatibility of the displacements — than was the former one. In Fig. 4(a) we plot the end-face stresses as created by the traction distribution (32). We recall that the stress functions are now

$$\varphi = k\, G_2\, \mathsf{f}_2\,, \qquad \Phi = (1-k)\, G_2\, \mathsf{F}_2\,. \tag{35}$$

where G is given by (24a), and k and γ_2 by (33b), (34). In Fig. 4(b) we plot the displacements u_{I}, u_{II}, w_{I}, w_{II}, w_{III}. The great improvement over the corresponding curves of 1 for Method A is clearly indicated. We also show curves u_0, w_0 as obtained from the inapplicable formulas (9). [The latter curves should act as deterrents to the use of formulas of type (9) in problems where the functions are not strictly harmonic.]

6. Method C. We write

$$\left.\begin{aligned} s_f = s_F &= \mathsf{s}_2 = 2\,r^2 - 1\,, \\ t_f = t_F &= \mathsf{t}_2 = \frac{1}{2}\,(r^3 - r)\,. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Then f_2 and F_2 are given by (21), (22), and the coefficients a_{ij} etc., of Eqs. (18) are found to have the values listed below, in Eq. (37), in the first numerical column. The heading $10^{-2}\times$ indicates: multiply each entry by 10^{-2}. The second column is based on the tractions s_4, t_4 Eqs. (55).

	$10^{-2}\times$	$10^{-4}\times$
a_{00}	35/3	27776/3
a_{11}	65/48	884/3
a_{22}	7/64	5
a_{02}	—5/48	—68/3
c_{00}	25/3	19840/3
c_{11}	65/48	884/3
c_{22}	0.102284526	4.7207062
c_{02}	0.236928104	59.1867160
b_{00}	35/3	27776/3
b_{11}	65/24	1768/3
b_{22}	0.158780410	4.9071620
b_{02}	0.801334423	156.564392
b_{20}	5/8	136

(37)

On taking the variation of U^* one obtains

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{2\pi}\,\delta U^* &= \int_0^\infty \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g}\,\delta g + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g'}\,\delta g' + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g''}\,\delta g'' + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G}\,\delta G + + \right] dz \\ &= \int_0^\infty \left[\left\{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g} - \frac{d}{dz}\,\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g'} + \frac{d^2}{dz^2}\,\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g''}\right\}\delta g + \left\{\ \right\}\delta G\right] dz + \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g'} - \frac{d}{dz}\,\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g''}\right)\delta g + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g''}\,\delta g'\right]_0^\infty \\ &\quad + \left[\left(\ \right)\delta G + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G''}\,\delta G'\right]_0^\infty = 0 \end{aligned} \tag{38}$$

from which there result the *Euler* equations

$$2\,[a_{22}\,g^{\mathrm{IV}} + (a_{02} - a_{11})\,g'' + a_{00}\,g] + [b_{22}\,G^{\mathrm{IV}} + (b_{20} + b_{02} - b_{11})\,G'' + b_{00}\,G] = 0\,, \tag{39a}$$

$$[b_{22}\,g^{\mathrm{IV}} + (b_{20} + b_{02} - b_{11})\,g'' + b_{00}\,g] + 2\,[c_{22}\,G^{\mathrm{IV}} + (c_{02} - c_{11})\,G'' + c_{00}\,G] = 0\,. \tag{39b}$$

The eigenvalue equation is

$$\begin{vmatrix} 2\,a_{22}\,\gamma^4 + 2\,(a_{02} - a_{11})\,\gamma^2 + 2\,a_{00} & b_{22}\,\gamma^4 + (b_{20} + b_{02} - b_{11})\,\gamma^2 + b_{00} \\ b_{22}\,\gamma^4 + (b_{20} + b_{02} - b_{11})\,\gamma^2 + b_{00} & 2\,c_{22}\,\gamma^4 + 2\,(c_{02} - c_{11})\,\gamma^2 + 2\,c_{00} \end{vmatrix} = 0 \tag{40}$$

and the solution is

$$\gamma_2 = 2.664150 + i\ 1.401370\,, \tag{41a}$$

$$\gamma_2' = 4.919928 + i\ 0.5651619. \tag{41b}$$

γ_2' is a spurious root, resembling γ_4, whose purpose is to provide a better fit in the stress and displacement distributions than would be available on the basis of γ_2 alone.

Note that by virtue of (6c, d) two boundary conditions have been implied in the statement of the problem of (36); namely, for the case of normal loading

$$\sigma_z^\circ = \mathfrak{s}_2(r)\,, \qquad \tau^\circ = 0: \qquad g(0) + G(0) = 1\,, \tag{42a}$$

$$g'(0) + G'(0) = 0 \tag{42b}$$

and for the case of shear loading

$$\sigma_z^\circ = 0\,, \qquad \tau^\circ = \mathfrak{t}_2(r): \qquad h(0) + H(0) = 0\,, \tag{43a}$$

$$h'(0) + H'(0) = 1\,. \tag{43b}$$

These conditions, in turn, imply

$$\delta g(0) = -\,\delta G(0)\,, \tag{44a}$$

$$\delta g'(0) = -\,\delta G'(0)\,. \tag{44b}$$

Introducing (44) into the last line of (38) we obtain the two supplementary ("natural") boundary conditions

$$\text{at } z = 0: \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g'} - \frac{d}{dz}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g''} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G'} - \frac{d}{dz}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G''}\,, \tag{45a}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g''} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G''}\,. \tag{45b}$$

In order to determine the coefficients in the axial functions

$$\left.\begin{aligned} g_2(z) &= e^{-\alpha_2 z}(m\cos\beta_2 z + n\sin\beta_2 z) + e^{-\alpha_2' z}(p\cos\beta_2' z + q\sin\beta_2' z)\,,\\ G_2(z) &= e^{-\alpha_2 z}(M\cos\beta_2 z + N\sin\beta_2' z) + e^{-\alpha_2' z}(P\cos\beta_2' z + Q\sin\beta_2' z)\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

we substitute (46) into Eq. (39a). This provides four equations between the coefficients. Four more are obtained by substitution into (42a), (42b), (45a), and (45b). Solving the eight equations there result

$$10\,g_2(z) = e^{-\alpha_2 z}[2.36108\cos\beta_2 z + 6.77826\sin\beta_2 z] + e^{-\alpha_2' z}[0.98573\cos\beta_2' z + 3.48640\sin\beta_2' z]\,, \tag{47a}$$

$$10\,G_2(z) = e^{-\alpha_2 z}[7.56523\cos\beta_2 z + 1.25127\sin\beta_2 z] + e^{-\alpha_2' z}[-0.91204\cos\beta_2' z - 3.88647\sin\beta_2' z] \tag{47b}$$

for the normal loading case, and using (43a) and (43b),

$$10\,h_2(z) = e^{-\alpha_2 z}[0.94576\cos\beta_2 z - 6.28375\sin\beta_2 z] + e^{-\alpha_2' z}[2.35219\cos\beta_2' z + 1.15598\sin\beta_2' z]\,, \tag{48a}$$

$$10\,H_2(z) = e^{-\alpha_2 z}[-0.76619\cos\beta_2 z - 12.92232\sin\beta_2 z] + e^{-\alpha_2' z}[-2.53176\cos\beta_2' z - 1.38912\sin\beta_2' z] \tag{48b}$$

or the shear loading case.

We may write the stresses in the form

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= [a_r(r)\cos\beta z + b_r(r)\sin\beta z]\,e^{-\alpha z} + [c_r(r)\cos\beta' z + d_r(r)\sin\beta' z]\,e^{-\alpha' z}\,,\\ \sigma_\theta &= [a_\theta\cos + b_\theta\sin]\,e^{-\alpha z} + [c_\theta\cos + d_\theta\sin]\,e^{-\alpha' z}\,,\\ \sigma_z &= s(r)\,\mathfrak{G}(z)\,, \qquad \mathfrak{G} = g + G\,,\\ \tau &= -\,t(r)\,\mathfrak{G}'(z)\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

One finds that for $\mathfrak{s}_2(r)$ loading

$$\left.\begin{aligned} 10\,a_r &= -\,10.3718\,r^4 + 20.4374\,r^2 - 10.0655\,,\\ 10\,b_r &= 18.8499\,r^4 - 31.0229\,r^2 + 12.1730\,,\\ 10\,c_r &= 0.5021\,r^4 - 0.5161\,r^2 + 0.0139\,,\\ 10\,d_r &= 1.1230\,r^4 - 3.1691\,r^2 + 2.0461\,,\end{aligned}\right\} \tag{50a}$$

$$\left.\begin{aligned} 10\,a_\theta &= -\,5.3169\,r^4 + 14.7701\,r^2 - 10.0655\,,\\ 10\,b_\theta &= 7.6714\,r^4 - 6.4906\,r^2 + 12.1730\,,\\ 10\,c_\theta &= 0.5181\,r^4 + 0.4444\,r^2 + 0.0139\,,\\ 10\,d_\theta &= 10.1883\,r^4 - 14.0806\,r^2 + 2.0461\end{aligned}\right\} \tag{50b}$$

and for $\mathfrak{t}_2(r)$ loading ($\mathfrak{H} = h + H$ taking place of $\mathfrak{G}$)

$$\left.\begin{aligned} 10\,a_r &= -5.9678\,r^4 + 10.8119\,r^2 - 4.8441\,, \\ 10\,b_r &= 3.9372\,r^4 - 5.9586\,r^2 + 2.0213\,, \\ 10\,c_r &= -0.3179\,r^4 + 0.7336\,r^2 - 0.4157\,, \\ 10\,d_r &= -0.1025\,r^4 + 0.4771\,r^2 - 0.3686\,, \end{aligned}\right\} \tag{51a}$$

$$\left.\begin{aligned} 10\,a_\theta &= -2.7510\,r^4 + 5.3479\,r^2 - 4.8441\,, \\ 10\,b_\theta &= 1.4327\,r^4 + 0.3778\,r^2 + 2.0213\,, \\ 10\,c_\theta &= -2.1512\,r^4 + 2.7624\,r^2 - 0.4157\,, \\ 10\,d_\theta &= -1.7450\,r^4 + 2.6460\,r^2 - 0.3686\,. \end{aligned}\right\} \tag{51b}$$

The functions $a(r), \ldots$ are tabulated vs. r in Table 1, and the functions $e^{-\alpha z}\cos\beta z, \ldots$ are tabulated in Table 2.

Table 1. *The r-Factors of the Stresses (49), for* $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{t}_2$ *Tractions*

r	$\mathfrak{s}_2$	a_r	b_r	c_r	d_r	a_θ	b_θ	c_θ	d_θ
0	—1.00	—1.0066	1.2173	0.0014	0.2046	—1.0066	1.2173	0.0014	0.2046
0.1	— .98	— .9862	1.1865	.0009	.2014	— .9918	1.2108	.0018	.1906
.2	— .92	— .9265	1.0962	— .0006	.1921	— .9483	1.1916	.0032	.1499
.3	— .82	— .8310	.9534	— .0028	.1770	— .8779	1.1602	.0058	.0861
.4	— .68	— .7061	.7692	— .0056	.1568	— .7838	1.1177	.0098	— .0054
.5	— .50	— .5604	.5595	— .0084	.1324	— .6705	1.0655	.0157	— .0837
.6	— .28	— .4052	.3448	— .0107	.1051	— .5437	1.0053	.0241	— .1702
.7	— .02	— .2541	.1498	— .0118	.0763	— .4105	.9394	.0356	— .2407
.8	.28	— .1234	— .0039	— .0111	.0478	— .2790	.8704	.0510	— .2792
.9	.62	— .0316	— .0588	— .0075	.0216	— .1590	.8012	.0714	— .2675
.95	.805	— .0069	— .0472	— .0043	.0101	— .1066	.7677	.0837	— .2363
1.0	—1.00	0	0	0	0	— .0612	.7354	.0976	— .1846

r	$\mathfrak{t}_2$	a_r	b_r	c_r	d_r	a_θ	b_θ	c_θ	d_θ
0	0	—0.4844	0.2021	—0.0416	—0.0369	—0.4844	0.2021	—0.0416	—0.0369
0.1	—0.0495	— .4734	.1962	— .0408	— .0364	— .4791	.2025	— .0388	— .0342
.2	— .0960	— .4421	.1789	— .0387	— .0350	— .4635	.2039	— .0309	— .0266
.3	— .1365	— .3919	.1517	— .0352	— .0326	— .4385	.2067	— .0184	— .0145
.4	— .1680	— .3267	.1169	— .0306	— .0295	— .4059	.2118	— .0029	.0010
.5	— .1875	— .2514	.0778	— .0252	— .0256	— .3679	.2205	.0140	.0184
.6	— .1920	— .1725	.0386	— .0193	— .0210	— .3275	.2343	.0300	.0368
.7	— .1785	— .0979	.0047	— .0132	— .0160	— .2884	.2550	.0421	.0509
.8	— .1440	— .0369	— .0180	— .0076	— .0105	— .2548	.2850	.0471	.0610
.9	— .0855	— .0002	— .0222	— .0030	— .0049	— .2317	.3267	.0410	.0630
.95	— .0463	.0053	— .0149	— .0013	— .0022	— .2258	.3529	.0325	.0598
1.0	0	0	0	0	.0006	— .2247	.3832	.0196	.0532

Table 2. *The z-Factors of th Stresses (49), for* $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{t}_2$ *Tractions*

z	$e^{-\alpha z}\cos\beta z$	$e^{-\alpha z}\sin\beta z$	$e^{-\alpha' z}\cos\beta' z$	$e^{-\alpha' z}\sin\beta' z$	$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{G}'$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{H}'$
0	1.0000	0	1.0000	0	1.0000	0	0	1.0000
0.1	.7586	0.1070	.6104	0.0345	.9626	—0.6834	0.0764	.5567
.2	.5640	.1624	.3714	.0422	.8741	—1.0408	.1161	.2572
.3	.4105	.1835	.2253	.0386	.7616	—1.1802	.1314	.0632
.4	.2918	.1832	.1362	.0313	.6427	—1.1809	.1313	— .0553
.6	.1348	.1507	.0493	.0174	.4242	— .9756	.1082	— .1515
.8	.0516	.1069	.0176	.0085	.2572	— .6943	.0769	— .1521
1.0	.0118	.0687	.0062	.0039	.1440	— .4473	.0495	— .1195
1.2	— .0045	.0406	.0021	.0017	.0738	— .2654	.0294	— .0824
1.6	— .0088	.0110	.0002	.0003	.0126	— .0725	.0080	— .0301
2.0	— .0046	.0016	0	0	— .0014	— .0108	.0012	— .0078
2.4	— .0016	— .0004	0	0	— .0023	.0023	— .0003	— .0010

The stress profiles $\sigma_r(z, r)$, $\sigma_\theta(z, r)$, $\sigma_z(r\,z,\,)$, $\tau(z, r)$ are plotted, at $z = 0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.8,\ 1.2$ vs. r, in Figs. 5(a) through 5(d) for the case of normal loading and in Figs. 6(a) through 6(d) for the case of shear loading. In Figs. 5(e) and 6(e) the variation, with z, of the stresses $\sigma_r(z, 0) = \sigma_\theta(z, 0)$, $\sigma_\theta(z, 1)$, $\sigma_z(z, 0) = -\sigma_z(z, 1)$, and $\tau(z, 0.6)$ is plotted. (τ is a maximum at $r = 1/\sqrt{3}$; at location $r = 0.6$, for which the calculations were made, τ differs insignificantly from this maximum value.) The end-face displacements u_{I}, u_{II}, w_{I}, w_{II}, w_{III} are plotted in Figs. 5(f) and 6(f).[1] It is seen that, for $\mathfrak{s}_2$ loading, $\mathrm{u_I}$ and u_{II} as well as w_{I} and w_{II} coincide within graph paper accuracy. However, w_{III} differs somewhat from w_{I} and w_{II}. Since (27d) involves — through $\partial u/\partial z$ — a stress derivative, the displacements w_{I}, w_{II} are vulnerable to errors in the stress derivatives, even if the stresses themselves are excellent approximations to the true stresses. Therefore, w_{III} should be trusted in preference to w_{I}, w_{II}.

Figures 5(f) and 6(f) show also the u_0, w_0 curves, as derived from the inapplicable formulas (9). Comparison of Fig. 5(f) with Fig. 4(b) shows that even these curves are now greatly improved, but they still remain unsatisfactory.

6. The rule of orthogonalization. In order to furnish approximations to the higher eigenvalues of Eq. (12) we must define an orthogonalization procedure for generating the higher polynomials f_4, F_4; f_6, F_6; ... The approximate eigenvalue γ_k is obtained by placing f_k, F_k into the integrals (18) and solving the corresponding secular equation (40).

In 1 we were primarily concerned with the functions $\Phi_k = G_k F_k$. These functions did not seem to be amenable to any "obvious" orthogonalization rule, so we defined the $F_k(r)$ polynomials, of degree $k + 2$, by the requirements that one coefficient in the polynomial be 1 (we have chosen the r^2 coefficient for this purpose), two coefficients were determined by the requirements (1a, 1b) that $\tau(z, 1) = \sigma_r(z, 1) = 0$, and the remaining coefficients by the — for calculation purposes astronomically laborious — requirement that α_k be an extremum. We called this method of construction a "generalized orthogonalization rule".[2]

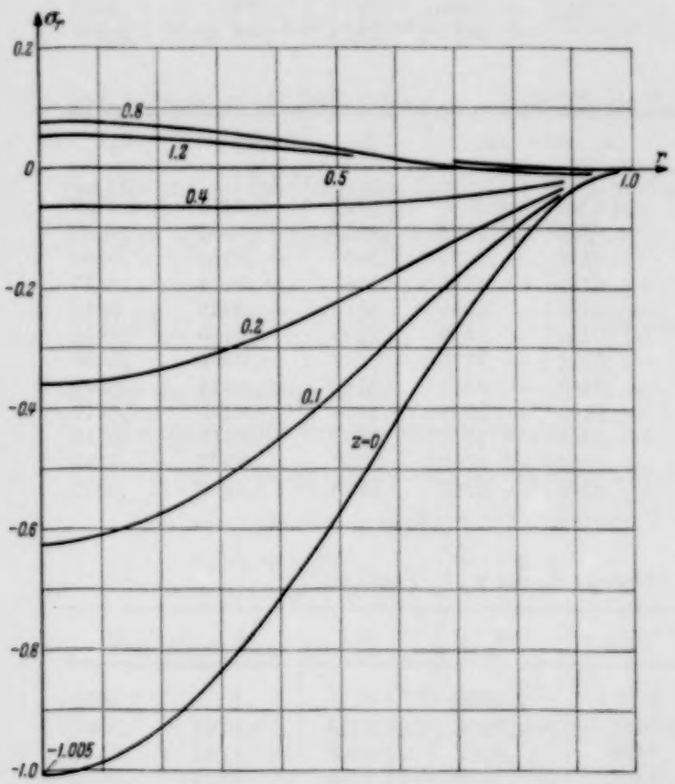

Fig. 5a.

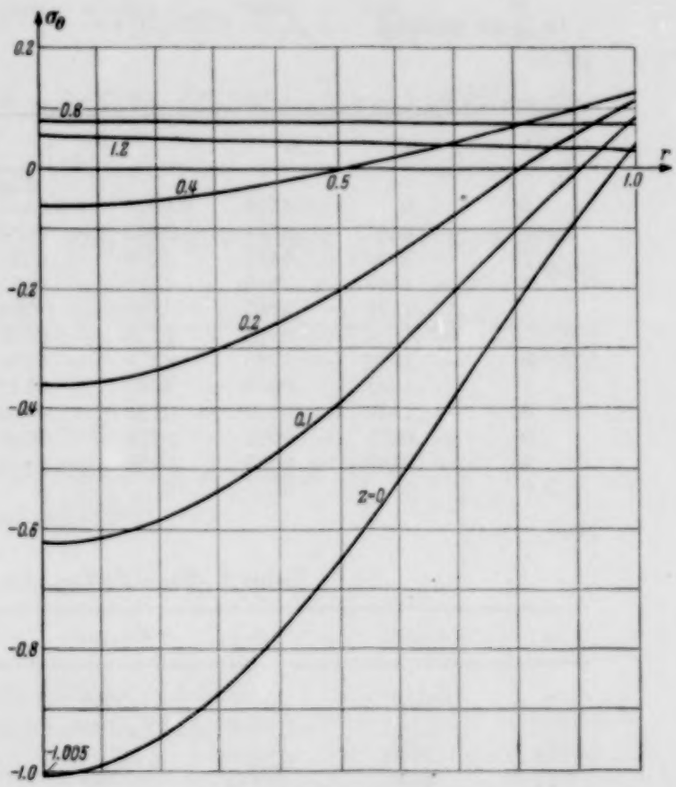

Fig. 5b.

Fig. 5a—f. Diagrams (a) through (e) illustrate the stresses σ_r, σ_θ, σ_z, τ for loading of the cylinder by $\sigma^c(r) = s_2(r) = 2\,r^2 - 1$. Diagram (f) compares the endface displacements u, w calculated by various methods [see Eqs. (7), (9)].

[1] It is to be remembered that our u and w are denoted by $2\,G\,u$, $2\,G\,w$ in conventional units.

[2] See also, *G. Horvay*, Orthogonal Edge Polynomials in the Variational Solution of Some Boundary Layer Problems in Elasticity, submitted to ZAMP.

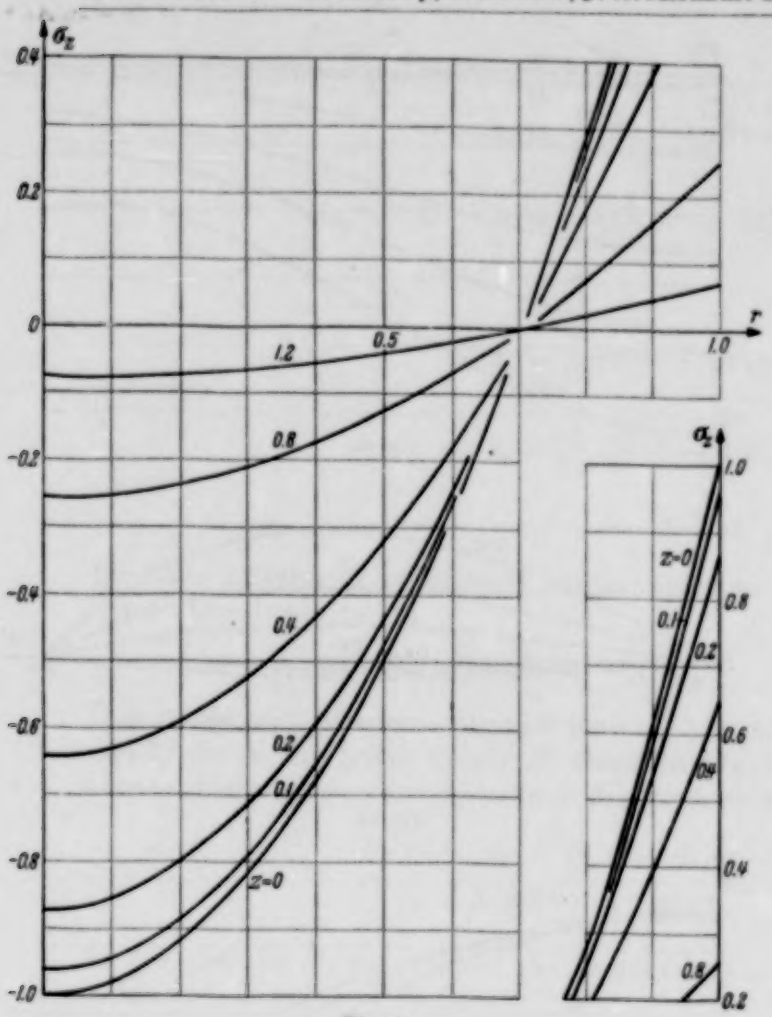

Fig. 5c.

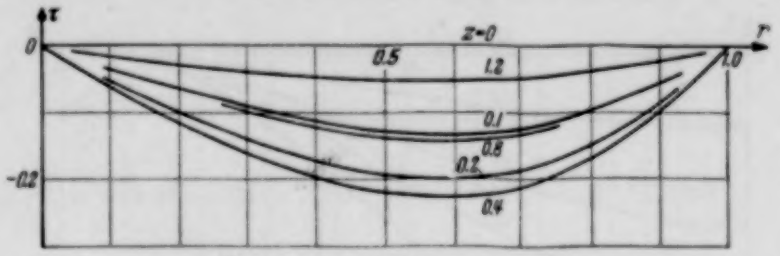

Fig. 5d.

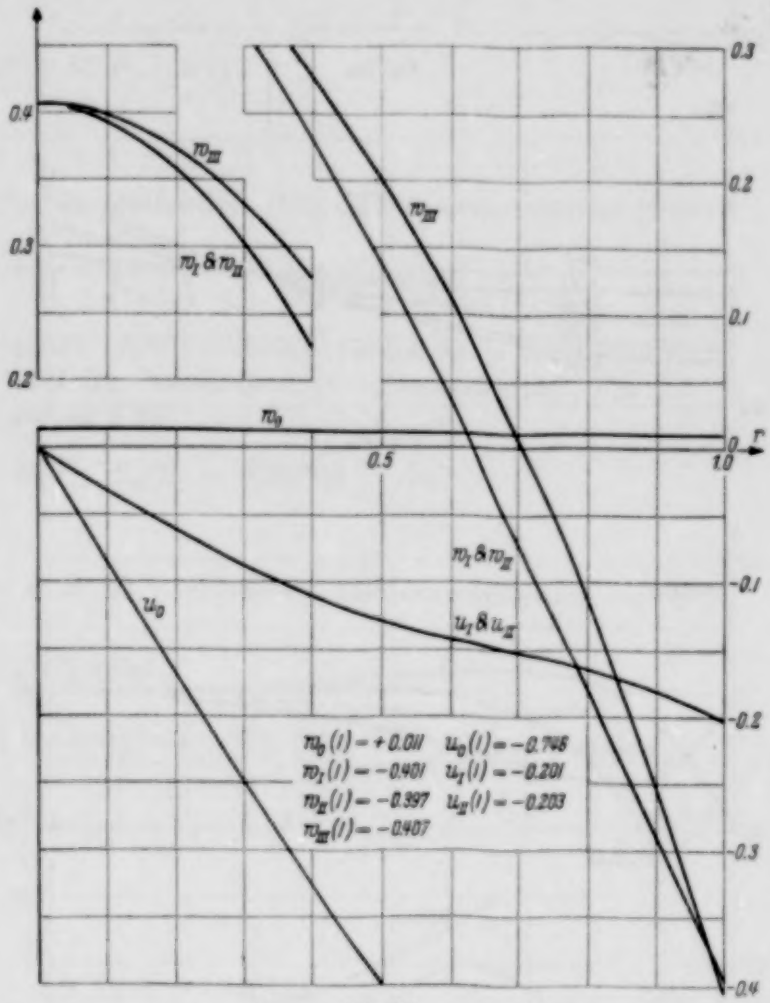

Fig. 5f.

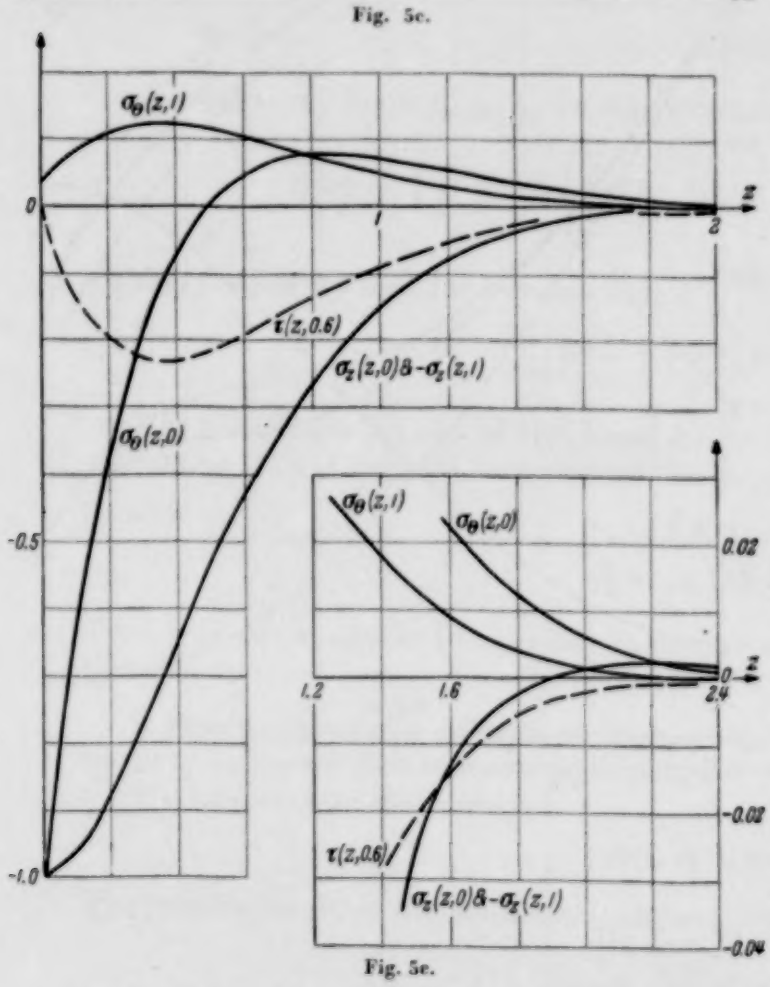

Fig. 5e.

In the present case, where both the $f_k(r)$ and $F_k(r)$ polynomials are used, the appropriate method of orthogonalization is, however, "obvious". We found earlier that

$$f_2 = \frac{1}{8}(1 - r^2)^2, \tag{52 a}$$

We now write

$$f_k(r) = (1 - r^2)^2 (a_0 + a_2 r^2 + a_4 r^4 + \cdots + a_{k-2} r^{k-2}) . \tag{52 b}$$

This form of $f_k(r)$ guarantees satisfaction of the boundary conditions (1a, 1b), and so these conditions need no longer be accounted for in an orthogonalization procedure. We therefore may define the orthonormalization rule for functions (52b) in a conventional fashion, by the requirement that

$$\int_0^1 f_k(r)\, f_l(r) r\, dr = \begin{cases} 1 \text{ for } k = l , \\ 0 \text{ for } k \neq l . \end{cases} \tag{53}$$

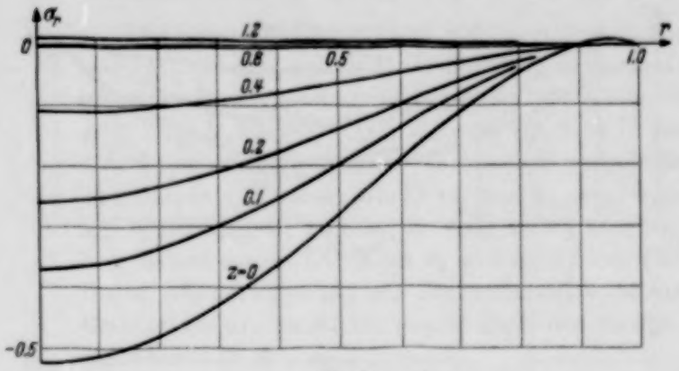

Fig. 6a.

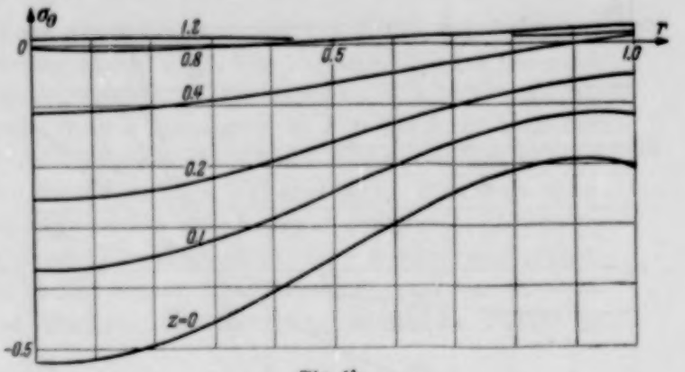

Fig. 6b.

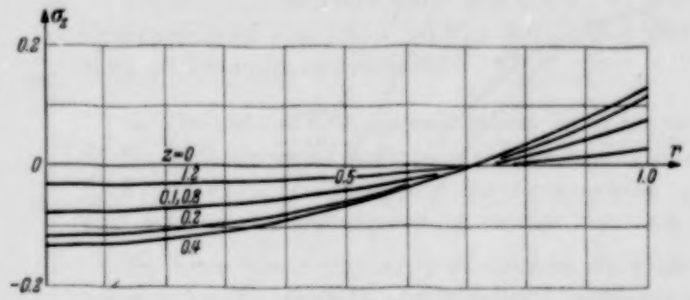

Fig. 6c.

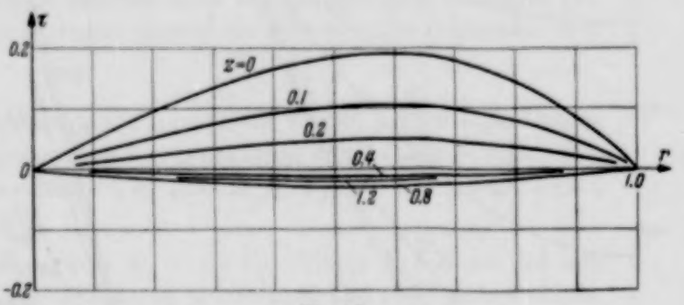

Fig. 6d.

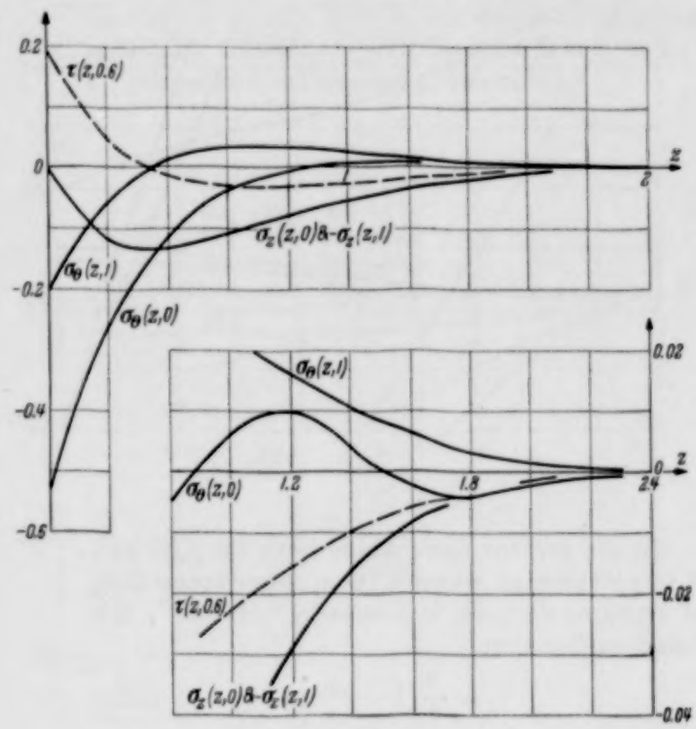

Fig. 6e.

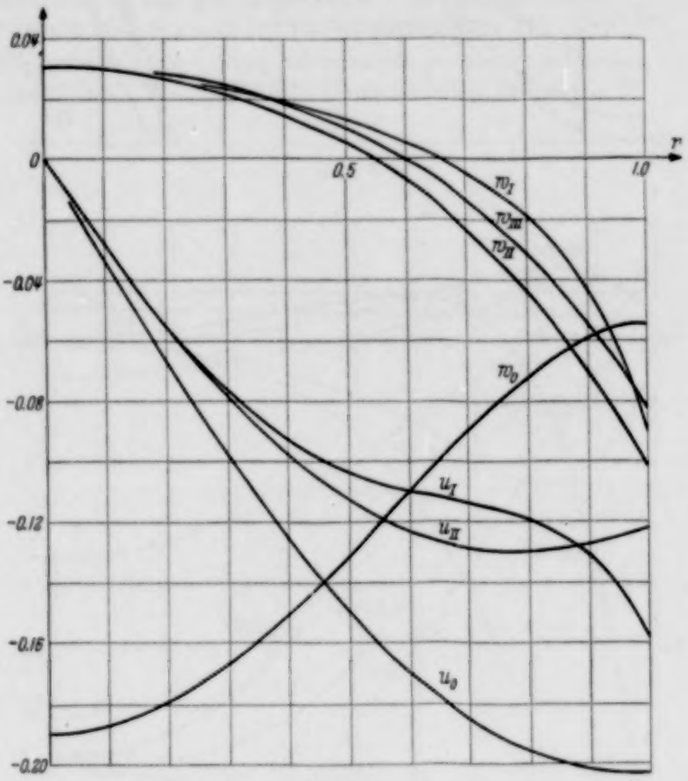

Fig. 6f.

Fig. 6a-f. Diagrams (a) through (e) illustrate the stresses σ_r, σ_θ, σ_z, τ_z for loading of the cylinder by $\tau^*(r) = t_2(r) = (1/2)(r^2 - r)$. Diagram (f) compares the endface displacements u, w calculated by various methods [see Eqs. (7), (9)].

One thus finds

$$\left.\begin{aligned} f_k &= N_k \mathfrak{f}_k , \\ \mathfrak{f}_2 &= \frac{1}{8}(1-r^2)^2 , \qquad N_2 = 8\sqrt{10} , \end{aligned}\right\} \tag{54a}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{f}_4 &= \frac{1}{40}(1-r^2)^2(1-6r^2) , & N_4 &= 40\sqrt{14} , \\ \mathfrak{f}_6 &= \frac{1}{60}(1-r^2)^2(1-14r^2+28r^4) , & N_6 &= 60\sqrt{18} . \end{aligned}\right\} \tag{54b}$$

Correspondingly, by formulas (5b, c),

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{s}_4 &= \frac{1}{5}(27\,r^4 - 26\,r^2 + 4)\,, \\ \mathsf{s}_6 &= \frac{1}{15}(225\,r^6 - 315\,r^4 + 114\,r^2 - 8)\,, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{55a}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{t}_4 &= \frac{1}{10}(9\,r^5 - 13\,r^3 + 4\,r)\,, \\ \mathsf{t}_6 &= \frac{1}{15}(56\,r^7 - 105\,r^5 + 57\,r^3 - 8\,r)\,. \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{55b}$$

Boldface letters, as mentioned earlier, refer to the normalization (20). The normalization (53), (54a) then leads to

$$s_k = N_k\,\mathsf{s}_k\,, \qquad t_k = N_k\,\mathsf{t}_k\,, \qquad f_k = N_k\,\mathsf{f}_k\,, \qquad F_k = N_k\,\mathsf{F}_k\,. \tag{56}$$

It is noted with pleasant surprise that the characteristic tractions thus obtained differ but insignificantly from the polynomials obtained in Fig. 3 of 1 by the method of extremizing α_k. For instance, the requirement $\alpha_4 = \max$ for Method A led in 1 to

$$F_4(r) = B_0 + B_2\,r^2 + B_4\,r^4 + B_6\,r^6;\ B_6/B_2 = 0.34084 \quad \text{and}$$
$$\gamma_4 = 5.5888 + i\,2.4642\,.$$

In the present F_4 polynomial the coefficient ratio is $B_6/B_2 = 0.34450$. The corresponding eigenvalue calculated by "Method A" is

$$\gamma_4 = 5.5832 + i\,2.4980\,.$$

Now that we know f_k, s_k, t_k, we may obtain F_k by integrating Eq. (5b). The explicit formula is

$$F_k(r) = \int_r^1 r^{-(3-2\nu)}\left[\int_0^r \varrho^{2(1-\nu)} f_k'(\varrho)\,d\varrho\right] dr - \frac{1}{1-2\nu}\int_0^1 \varrho^{2(1-\nu)} f_k'(\varrho)\,d\varrho\,. \tag{57}$$

In this fashion we find for instance that

$$\mathsf{F}_4(r) = \frac{3}{148}[r^6 - 2.96914\,r^4 + 2.901961\,r^2 - 0.75127]\,. \tag{58}$$

The coefficients a_{ij} etc. of (18) based on the functions f_4, F_4 are listed in the second numerical column of (37). From (40) one obtains the eigenvalue

$$\left.\begin{aligned} \gamma_4 &= 5.433 + i\,2.386\,, \\ \gamma_4' &= 16.162 + i\,6.271\,. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Time was not available to calculate the stress and displacement distributions produced by tractions s_4, t_4.

7. Stresses in a finite cylinder due to parabolic temperature distribution[1]. We return once more to the question of the stresses near the end $z = 0$ of an elastic cylinder (of length $\gtrsim 4$ radii) subject to the temperature distribution[2]

$$\Theta(z, r) = \Theta_M\,(1 - r^2)\,. \tag{60}$$

The stresses far from the end-faces (indicated by subscripts A) are

$$\sigma_{rA} = \frac{\mathfrak{S}}{4}(r^2 - 1)\,, \quad \sigma_{\theta A} = \frac{\mathfrak{S}}{4}(3\,r^2 - 1)\,, \quad \sigma_{zA} = \frac{\mathfrak{S}}{2}(2\,r^2 - 1)\,, \quad \tau_A = 0 \tag{61}$$

[1] In this section we revert to conventional stress units.

[2] *G. Horvay*, Stress Reduction Obtainable in Sectioned Heat Generating Cylinders, Proc. Second Midwestern Conf. Solid Mech., Ann Arbor, Mich. (1956), p. 45.

with

$$\mathfrak{S} \equiv \frac{E\,\alpha\,\Theta_M}{1-\nu}\,.$$

On these there is to be superimposed the effect of end tractions

$$\sigma_z^{\circ}(r) = -\frac{\mathfrak{S}}{2}(2\,r^2-1)\,. \tag{62}$$

The latter stresses[1] are $-\mathfrak{S}/2$ times the stresses illustrated in Figs. 5(a) through 5(e). We now note a very surprising thing. The largest stress in the finite cylinder does not occur on the face $z=0$[2]. It is an axial stress [c. f., Fig. 5(e)]

$$\sigma_z(2.3,\,1) = -\,\sigma_z(2.3,\,0) = \left(0.5 + \frac{0.0024}{2}\,\mathfrak{S}\right) = 0.501\,\mathfrak{S} \tag{63}$$

barely in excess of $\sigma_{z\,A,\,max}$, at a relatively large distance $z=2.3$ from the end-face. For the end-face $z=0$ we obtain

$$\sigma_r(0,\,0) = \sigma_\theta(0,\,0) = \left(-\,0.25 + \frac{1.005}{2}\right)\mathfrak{S} = +\,0.252\,\mathfrak{S} \qquad \sigma_\theta(0,\,1) = \left(0.50 - \frac{0.04}{2}\right)\mathfrak{S} = 0.48\,\mathfrak{S}\,. \tag{64}$$

The authors wish to express their appreciation to *J. S. Gillespie*, Manager of Engineering, Metallurgical Department of the General Electric Company, Detroit, Mich., for sponsoring, in part, this investigation, and for his interest. They wish to express their appreciation also to *H. Poritsky* and *M. F. Bolster* for permitting them to use their results, quoted in Eq. (13) and Fig. 2. These results are not available in the open literature.

(Eingegangen am 29. August 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *G. Horvay*, Schenectady, N. Y. (USA), Metallurgy and Ceramics Research Department, General Electric Company, General Electric Research Laboratory, Schenectady, N. Y.

[1] We denote these stresses by subscripts C; the resultant stresses are written without subscripts: $\sigma \equiv \sigma_A + \sigma_C$.

[2] It will be recalled (p. 416 of Ref.[3]) that in a thin-walled cylinder subject to a linear temperature gradient across the wall the largest stress is the end-face σ_θ stress, 25 per cent higher than the σ_θ stress far from the end-faces. In Ref.[5] it was incorrectly estimated that also for the full cylinder the maximum stress is an end-face hoop stress, about 10 to 16 per cent higher than far from the end-faces.

[3] *S. Timoshenko* and *J. N. Goodier*, Theory of Elasticity, New York 1950.

Large deflection of a circular cantilever beam with uniformly distributed load

By **K. Satō**

1. Introduction. *Rohde*[1] has obtained the solutions for a straight cantilever beam with uniformly distributed load. Also *Seames* and *Conway*[2] have presented a special numerical procedure for calculating the large deflection of straight and curved beams subjected to forces concentrated or distributed. Although this method is simple and also gives comparatively exact results, it can be applied only to the case of non-inflectional elastica.

The present paper deals with the bending of thin circular cantilever beam, convex downward, subjected to the uniformly distributed load. The basic assumptions are that the deformation is elastic and that the bending does not alter the length of beam. The deflections of the beam may be divided into two stages. In the first stage the deflections of the cantilever are relatively small and the curvatures at all points on the strained beam take the same signs as the initial ones, while in the second stage the strained beam has one point of inflection of the elastic line.

2. The First Stage of the Deflections. Fig. 1 shows a circular cantilever beam under the action of a load of intensity w distributed uniformly along the arc length. It is assumed that the unstressed form of the beam is a circular arc of radius R, as shown in dotted line in Fig. 1, and the included angle Θ for arc is less than $\pi/2$.

Taking the origin at the free end B and denoting by Φ the slope of the elastic line at any point of the strained beam, the *Bernoulli-Euler* equation may be expressed as

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{M}{D} - \frac{1}{R}\,, \tag{1}$$

where $d\Phi/ds$ is the curvature at any point of the beam, M the corresponding bending moment, D the flexural rigidity, and ds is an element of the arc. Differentiating with respect to s and substituting $(dM/ds) = (dM/dx)\cos\Phi = w\,s\cos\Phi$, we obtain

$$\frac{d^2\Phi}{ds^2} = \frac{w\,s}{D}\cos\Phi\,. \tag{2}$$

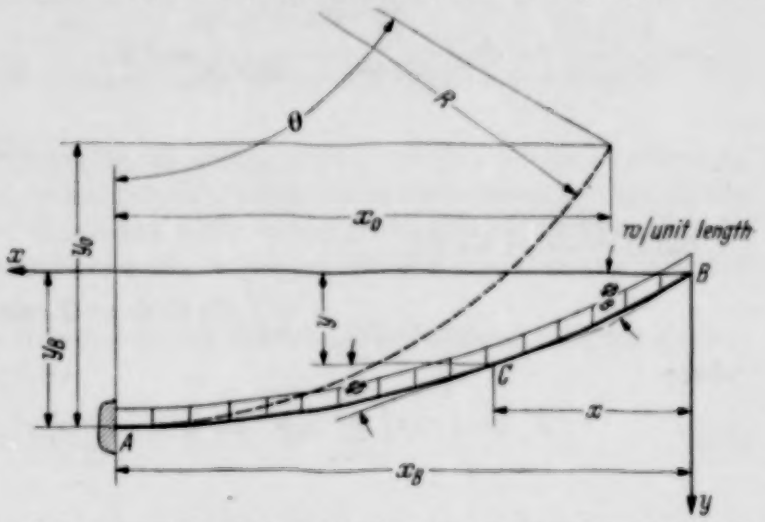

Fig. 1. Illustration of the co-ordinates of a circular cantilever beam with uniformly distributed load, in the first stage.

The end conditions in this stage are

$$\left.\begin{aligned} &\text{at} \quad s = 0: \qquad \Phi = \Phi_B\,, \qquad \frac{d\Phi}{ds} = -\frac{1}{R}\,, \\ &\text{at} \quad s = l: \qquad \Phi = 0\,, \qquad -\frac{1}{R} \leqq \frac{d\Phi}{ds} \leqq 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

where l is the total length of the beam. We put

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n\,, \qquad \frac{d\Phi}{ds} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,s^{n-1}\,, \qquad \frac{d^2\Phi}{ds^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n\,s^{n-2}\,, \tag{4}$$

where a_n is the coefficient to be determined. The end conditions give $a_0 = \Phi_B$ and $a_1 = -1/R$. Then equation (2) becomes

$$\frac{d^2\Phi}{ds^2} = \frac{w\,s}{D}\,(\cos\Phi_B\cos T - \sin\Phi_B\sin T)\,, \tag{5}$$

[1] *F. V. Rohde*, Q. Appl. Math. 11 (1953) p. 337.
[2] *A. E. Seames* and *H. D. Conway*, J. Appl. Mech. 24 (1957) p. 289.

where $T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n$. Expanding cos T and sin T and comparing the coefficients of various powers of s on both sides, a_n is determined as follows, including a_0 and a_1 obtained before:

$$
\begin{aligned}
&a_0 = \Phi_B, \qquad a_1 = -\frac{1}{R}, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = \frac{1}{6}\frac{w}{D}\cos\Phi_B,\\
&a_4 = \frac{1}{12}\frac{1}{R}\frac{w}{D}\sin\Phi_B, \qquad a_5 = -\frac{1}{40}\frac{1}{R^2}\frac{w}{D}\cos\Phi_B,\\
&a_6 = -\frac{1}{180}\left(\frac{w}{D}\right)^2\sin\Phi_B\cos\Phi_B - \frac{1}{180}\frac{1}{R^3}\frac{w}{D}\sin\Phi_B,\\
&a_7 = \frac{1}{R}\left(\frac{w}{D}\right)^2\left(\frac{1}{252} - \frac{1}{168}\sin^2\Phi_B\right) + \frac{1}{1008}\frac{1}{R^4}\frac{w}{D}\cos\Phi_B,\\
&a_8 = \frac{23}{6720}\frac{1}{R^2}\left(\frac{w}{D}\right)^2\sin\Phi_B\cos\Phi_B + \frac{1}{6720}\frac{1}{R^5}\frac{w}{D}\sin\Phi_B,\\
&a_9 = -\left(\frac{w}{D}\right)^3\cos\Phi_B\left(\frac{1}{5184} - \frac{7}{25920}\sin^2\Phi_B\right) - \frac{1}{R^3}\left(\frac{w}{D}\right)^2\left(\frac{19}{25920} - \frac{1}{720}\sin^2\Phi_B\right)\\
&\qquad\qquad - \frac{1}{51840}\frac{1}{R^6}\frac{w}{D}\cos\Phi_B,\\
&a_{10} = -\frac{1}{R}\left(\frac{w}{D}\right)^3\left(\frac{47}{113400}\sin\Phi_B - \frac{11}{25200}\sin^3\Phi_B\right) - \frac{67}{151200}\frac{1}{R^4}\left(\frac{w}{D}\right)^2\sin\Phi_B\cos\Phi_B\\
&\qquad\qquad - \frac{1}{453600}\frac{1}{R^7}\frac{w}{D}\sin\Phi_B,\\
&a_{11} = \frac{1}{R^2}\left(\frac{w}{D}\right)^3\cos\Phi_B\left(\frac{19}{138600} - \frac{7}{28800}\sin^2\Phi_B\right) + \frac{1}{R^5}\left(\frac{w}{D}\right)^2\left(\frac{1}{16800} - \frac{87}{739200}\sin^2\Phi_B\right)\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{4435200}\frac{1}{R^8}\frac{w}{D}\cos\Phi_B,\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Since $dy/ds = \sin\Phi$,

$$y = \int_0^s \sin\Phi\, ds = T_1 \sin\Phi_B + T_2 \cos\Phi_B, \tag{7}$$

where

$$T_1 = \int_0^s \cos\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n\right) ds = s - \frac{1}{6}a_1^2 s^3 - \left(\frac{1}{5}a_1 a_3 - \frac{1}{120}a_1^4\right)s^5 - \cdots,$$

$$T_2 = \int_0^s \sin\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n\right) ds = \frac{1}{2}a_1 s^2 + \left(\frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{24}a_1^3\right)s^4 + \frac{1}{5}a_4 s^5 + \cdots.$$

Similarly,

$$x = \int_0^s \cos\Phi\, ds = T_1 \cos\Phi_B - T_2 \sin\Phi_B = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n(n-1)\,a_n s^{n-2}}{(n-2)\frac{w}{D}}. \tag{8}$$

The bending moment M is obtained from equation (1) as

$$M = D\left(\frac{d\Phi}{ds} + \frac{1}{R}\right) = D\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n s^{n-1} + \frac{1}{R}\right). \tag{9}$$

The slope at the free end of a beam is obtained from equation (4) and the end condition $\Phi = 0$ at $s = l$:

$$\Phi_B = \frac{l}{R} - \sum_{n=3}^{\infty} a_n l^n. \tag{10}$$

In the limiting case $R \to \infty$, these equations for the first stage coincide with the results of the straight beam obtained by *Rhode*[1]. If the sign of w is reversed, these equations will give the deflection of a circular cantilever beam, concave downward.

[1] *F. V. Rohde*, Q. Appl. Math. 11 (1953) p. 337.

3. The Second Stage of the Deflections. Now, we proceed to the second stage of the deflections, in which the strained beam has a point of inflection. In this stage, it will be convenient to compute the deflection by reducing a circular cantilever to an initially straight cantilever with a couple M_0 applied at its free end. The couple M_0 must be constant, because it is the quantity relating to the initial shape of the beam, and can be expressed

$$M_0 = \frac{D}{R} . \tag{11}$$

Then if we cut the strained beam at the point of inflection O, as shown in Fig. 2, it may be treated as two straight cantilevers. The deflection of branch OA is equivalent to that of the straight can-

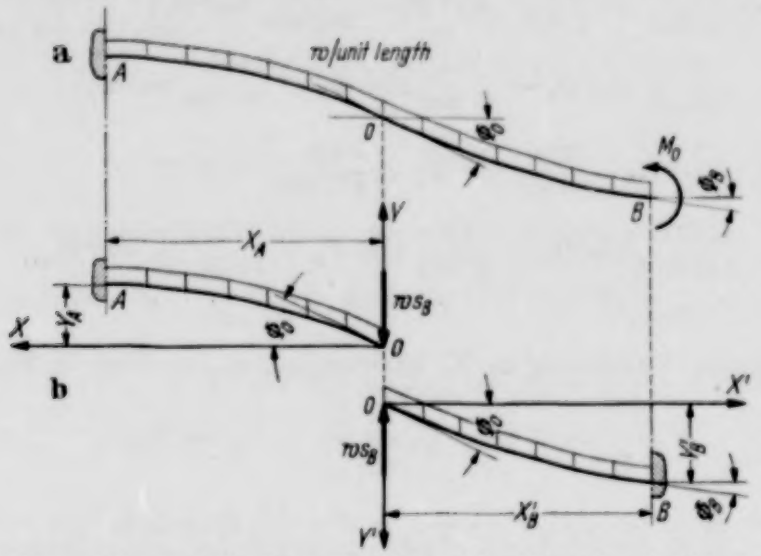

Fig. 2. Illustration of the co-ordinates of a circular cantilever beam with uniformly distributed load, in the second stage.

tilever due to a distributed load w and a concentrated force ws_B acting at the free end O, where s_B is the length of branch OB of the beam. The deflection of branch OB is equivalent to that of the straight cantilever, of which the clamped end B is fixed with an angle Φ_B to the horizontal, subjected to a distributed load w and a concentrated force ws_B acting at the free end O in the reversed direction to w, as shown in Fig. 2(b).

a) Branch OA. Taking the origin at the free end O and denoting the bending moment by M_r, the *Bernoulli-Euler* equation $d\Phi/ds = M_r/D$ gives

$$\frac{d^2\Phi}{ds^2} = \frac{1}{D}\frac{dM_r}{ds} = -\frac{w}{D}(s + s_B)\cos\Phi . \tag{12}$$

Then putting

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n , \qquad \frac{d\Phi}{ds} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n s^{n-1} , \qquad \frac{d^2\Phi}{ds^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, b_n s^{n-2} , \tag{13}$$

and denoting by Φ_0 the slope at the free end O of the beam, the solutions to this branch are obtained in the same way as in the first stage. Coefficient b_n of power series is

$$b_0 = \Phi_0 , \qquad b_1 = 0 , \qquad b_2 = -\frac{1}{2}\frac{w}{D} s_B \cos\Phi_0 , \qquad b_3 = -\frac{1}{6}\frac{w}{D}\cos\Phi_0 ,$$

$$b_i = \frac{B_{i-1} + s_B B_i}{i\,(i-1)} \qquad (i = 4, 5, 6, \ldots) ,$$

where

$$B_3 = 0 , \qquad B_4 = -\frac{1}{2}\left(\frac{w}{D}\right)^2 s_B \sin\Phi_0 \cos\Phi_0 , \qquad B_5 = -\frac{1}{6}\left(\frac{w}{D}\right)^2 \sin\Phi_0 \cos\Phi_0 ,$$

$$B_6 = \left(\frac{w}{D}\right)^3 s_B^3 \cos\Phi_0\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6}\sin^2\Phi_0\right) , \qquad B_7 = \left(\frac{w}{D}\right)^3 s_B \cos\Phi_0\left(\frac{1}{12} - \frac{7}{60}\sin^2\Phi_0\right) ,$$

$$B_8 = \left(\frac{w}{D}\right)^3 \cos\Phi_0\left(\frac{1}{72} - \frac{7}{360}\sin^2\Phi_0\right) + \left(\frac{w}{D}\right)^4 s_B^3 \cos\Phi_0\left(\frac{11}{240}\sin\Phi_0 - \frac{17}{360}\sin^3\Phi_0\right) ,$$

$$B_9 = \left(\frac{w}{D}\right)^4 s_B^3 \cos\Phi_0\left(\frac{83}{1680}\sin\Phi_0 - \frac{43}{840}\sin^3\Phi_0\right) ,$$

$$
\left.\begin{aligned}
B_{10} &= \left(\frac{w}{D}\right)^5 s_B^4 \cos\Phi_0\left(-\frac{3}{640}+\frac{19}{1120}\sin^2\Phi_0-\frac{31}{2520}\sin^4\Phi_0\right)\\
&\quad+\left(\frac{w}{D}\right)^4 s_B\cos\Phi_0\left(\frac{49}{2880}\sin\Phi_0-\frac{17}{960}\sin^3\Phi_0\right),\\
B_{11} &= -\left(\frac{w}{D}\right)^5 s_B^3\cos\Phi_0\left(\frac{67}{10080}-\frac{23}{1080}\sin^2\Phi_0+\frac{1333}{90720}\sin^4\Phi_0\right)\\
&\quad+\left(\frac{w}{D}\right)^4\cos\Phi_0\left(\frac{49}{25920}\sin\Phi_0-\frac{17}{8640}\sin^3\Phi_0\right),\\
B_{12} &= \left(\frac{w}{D}\right)^5 s_B^2\cos\Phi_0\left(-\frac{83}{24192}+\frac{2671}{259200}\sin^2\Phi_0-\frac{2087}{302400}\sin^4\Phi_0\right)\\
&\quad-\left(\frac{w}{D}\right)^6 s_B^5\cos\Phi_0\left(\frac{307}{134400}\sin\Phi_0-\frac{403}{75600}\sin^3\Phi_0+\frac{691}{226800}\sin^5\Phi_0\right),\\
B_{13} &= -\left(\frac{w}{D}\right)^5 s_B\cos\Phi_0\left(\frac{1}{1296}-\frac{3589}{1425600}\sin^2\Phi_0+\frac{833}{475200}\sin^4\Phi^0\right)\\
&\quad-\left(\frac{w}{D}\right)^6 s_B^4\cos\Phi_0\left(\frac{13283}{4435200}\sin\Phi_0-\frac{379}{57024}\sin^3\Phi_0+\frac{72889}{19958400}\sin^5\Phi_0\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\qquad(14)
$$

Consequently the deflection Y, refering to X, Y co-ordinates (see Fig. 2), becomes

$$Y=\int_0^s \sin\Phi\,ds = U_1\sin\Phi_0+U_2\cos\Phi_0\,,\qquad(15)$$

where

$$U_1=\int_0^s\cos\left(\sum_{n=2}^{\infty}{}' b_n s^n\right)ds = s-\frac{1}{10}b_2^2 s^5-\frac{1}{6}b_2 b_3 s^6-\left(\frac{1}{14}b_3^2+\frac{1}{7}b_2 b_4\right)s^7-\cdots,$$

$$U_2=\int_0^s\sin\left(\sum_{n=2}^{\infty}{}' b_n s^n\right)ds = \frac{1}{3}b_2 s^3+\frac{1}{4}b_3 s^4+\frac{1}{5}b_4 s^5+\frac{1}{6}b_5 s^6+\left(\frac{1}{7}b_6-\frac{1}{42}b_2^3\right)s^7+\cdots.$$

Similarly

$$X=\int_0^s\cos\Phi\,ds = U_1\cos\Phi_0-U_2\sin\Phi_0\,.\qquad(16)$$

The slope of the elastic line at the free end O is

$$\Phi_0=-\sum_{n=2}^{\infty}{}' b_n(l-s_B)^n\,.\qquad(17)$$

In this case the bending moment is

$$M_r=D\frac{d\Phi}{ds}=D\sum_{n=2}^{\infty}{}' n\,b_n\,s^{n-1}\,.$$

However, it must be noticed that the bending moment M_r is that of the straight cantilever beam. Taking into consideration a couple M_0 mentioned before and refering to x, y-coordinates, the bending moment M in branch OA of the original circular cantilever is expressed as

$$M=D\left[\frac{1}{R}-\sum_{n=2}^{\infty}{}' n\,b_n(s-s_B)^{n-1}\right],\qquad l\geqq s\geqq s_B\,.\qquad(18)$$

b) Branch OB. Taking the origin at the free end O as shown in Fig. 2 (b) and denoting by M_r' the bending moment in this case, we have

$$\frac{d^2\Phi}{ds^2}=\frac{1}{D}\frac{dM_r'}{ds}=\frac{w}{D}(s-s_B)\cos\Phi\,.\qquad(19)$$

The end conditions in this branch are

$$\left.\begin{aligned}
&\text{at}\quad s=0: && \Phi=\Phi_0\,, && \frac{d\Phi}{ds}=0\,,\\
&\text{at}\quad s=s_B: && \Phi=\Phi_B\,, && \frac{d\Phi}{ds}=-\frac{1}{R}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

For this branch, the solutions are obtained in an exactly similar way. Denoting by b'_n the coefficient of power series for this branch, it is connected with the coefficient b_n for branch OA by the relations

$$\left.\begin{aligned} b'_n &= -b_n \qquad \text{for odd } n\,, \\ b'_n &= b_n \qquad \text{for even } n\,. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

The bending moment M, refered to x, y-coordinates, in branch OB of the original circular cantilever is

$$M = D\left[\sum_{n=2}^{\infty} n\, b'_n\,(s_B - s)^{n-1} + \frac{1}{R}\right], \qquad s \leqq s_B\,. \tag{22}$$

The end conditions at $s = s_B$ give

$$\Phi_B = \Phi_0 + \sum_{n=2}^{\infty} b'_n\, s_B^n\,, \tag{23}$$

$$\frac{1}{R} = -\sum_{n=2}^{\infty} n\, b'_n\, s_B^{n-1}\,. \tag{24}$$

For convenience of the numerical calculation, we rewrite equation (24) in the form

$$\begin{aligned} \frac{s_B}{l}\Theta = \frac{1}{2}\,V\cos\Phi_0 + \frac{1}{30}\,V^2\cos\Phi_0\sin\Phi_0 - V^3\cos\Phi_0\left(\frac{7}{2880} - \frac{1}{320}\sin^2\Phi_0\right) \\ - V^4\cos\Phi_0\left(\frac{607}{1995840}\sin\Phi_0 - \frac{23}{24640}\sin^3\Phi_0\right) + \cdots, \end{aligned} \tag{25}$$

where

$$V = \left(\frac{s_B}{l}\right)^3\left(\frac{w\,l^3}{D}\right).$$

By the proper connection of two branches at the point O, the whole shape of the strained beam are obtained. The procedure will be stated later.

The shape of the strained beam having the point of inflection at its clamped end corresponds to that for the transition from the first stage to the second stage. Substituting $s_B = l$ and $\Phi_0 = 0$ into equation (25), the relation between Θ and $w\,l^3/D$ in the transient state is obtained in the form

$$\Theta = \frac{l}{R} = -\sum_{n=2}^{\infty} n\, b'_n\, l^n = \frac{1}{2}\frac{w\,l^3}{D} - \frac{7}{2880}\left(\frac{w\,l^3}{D}\right)^3 + \frac{3127}{239500800}\left(\frac{w\,l^3}{D}\right)^5 - \cdots, \tag{26}$$

and from equation (23), denoting by Φ_{Bt} the slope at the free end of a beam in this state,

$$\Phi_{Bt} = \sum_{n=2}^{\infty} b'_n\, l^n = -\frac{1}{3}\frac{w\,l^3}{D} + \frac{17}{22680}\left(\frac{w\,l^3}{D}\right)^3 - \frac{12787}{4670265600}\left(\frac{w\,l^3}{D}\right)^5 + \cdots. \tag{27}$$

4. Numerical Examples. The numerical calculations have been carried out for the cases $\Theta = 30°$, $45°$, and $60°$. The deflection ratios $(y_0 - y_B)/l$ and $(x_B - x_0)/l$ and the values of Ml/D at the clamped end against the various values of wl^3/D have been given for these three cases.

It will be convenient to carry out the numerical calculations by the following procedure: For a given beam, the value of angle $\Theta = l/R$ will be known. The values of wl^3/D and Φ_{Bt} in the transient state are easily obtained from equations (26) and (27), respectively, and the corresponding deflections can easily be determined using the equations for the second stage.

For the first stage, assuming a value of Φ_B $(\Phi_{Bt} \leqq \Phi_B \leqq \Theta)$, a value of wl^3/D is determined from equation (10). Using these values, equations (7) and (8) give the ratios y_B/l and x_B/l, respectively. Then the deflection ratios $(y_0 - y_B)/l$ and $(x_B - x_0)/l$ are determined. The non-dimensional quantity Ml/D at the clamped end is obtained from equation (9).

For the second stage, assuming a value of Φ_0 $(0 < \Phi_0)$ and solving equations (17) and (25) simultaneously, we obtain the ratio s_B/l and the non-dimensional quantity wl^3/D. Successively, equation (23) gives the value of Φ_B. Using these values, equations (15) and (16) give the ratios Y_A/l, Y'_B/l and X_A/l, X'_B/l, respectively. Then the deflection ratios $(y_0 - y_B)/l$ $[= (1 - \cos\Theta)/\Theta + (Y_A + Y'_B)/l]$ and $(x_B - x_0)/l$ $[= (X_A + X'_B)/l - \sin\Theta/\Theta]$ are determined. The non-dimensional quantity Ml/D at the clamped end is obtained from equation (18).

Repeating the calculations for various values of Φ_B, for the first stage, and Φ_0, for the second stage, the deflection ratios and Ml/D for the various values of wl^3/D are found. These values were calculated with sufficient accuracy by using power series including eleven terms for the first stage and thirteen terms for the second stage. However, in the second stage also, there were many cases used eleven terms because good convergency of series.

Figs. 3 and 4 show plots of the deflection ratios and Ml/D at the clamped end versus wl^3/D for $\Theta = 30°$, $45°$, and $60°$. In Figs. 3 and 4, the marks o on the curves show the transition points from the first stage to the second stage.

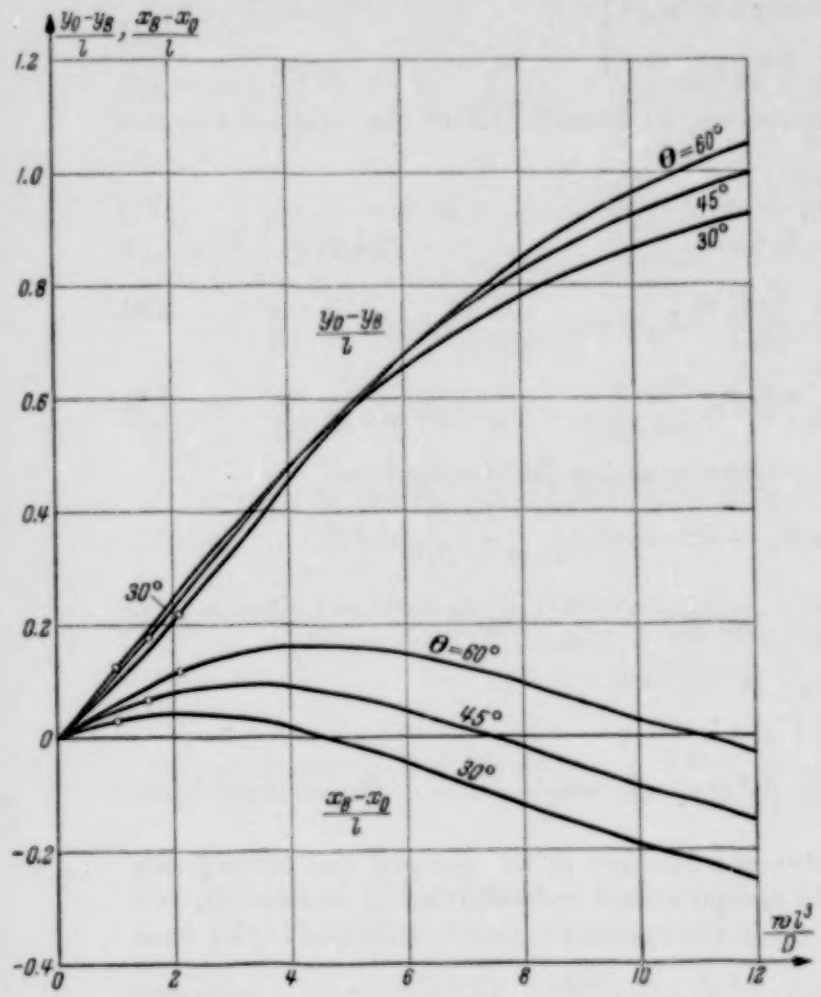

Fig. 3. Variation of $(x_B - x_0)/l$ and $(y_0 - y_B)/l$ with wl^3/D.

5. Summary. In this paper, the bending of thin circular cantilever beam, convex downward, under a uniformly distributed load is discussedby the use of the *Bernoulli-Euler* equation. The solutions are obtained in the form of power series. Numerical results are also presented.

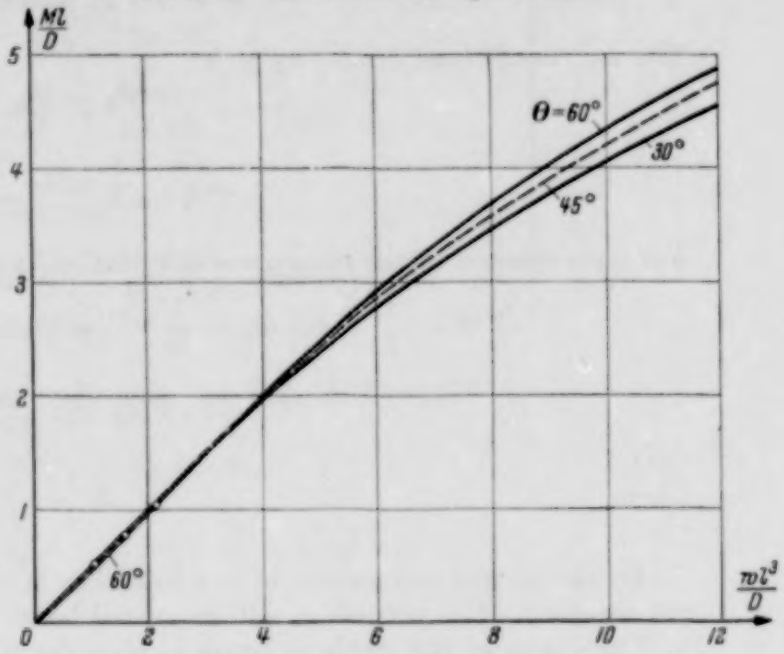

Fig. 4. Variation of Ml/D at the clamped end of a circular cantilever with wl^3/D.

The author wishes to thank Dr. *S. Higuchi*, Professor Emeritus of the Tōhoku University, for his suggestion and encouragement in the work. The author also wishes to thank Professor *F. Numachi* and *Professor O. Tamate* for their kind advice.

(Eingegangen am 2. Oktober 1958.)

Anschrift des Verfassers: *Kiichi Satō*, Sakurakōji, Sendai (Japan), Tōhoku University, Department of Mechanical Engineering.

Berichtigung

zu meiner Arbeit S. 73 dieses Bandes „Die Beschleunigungsänderung, II. Mitteilung"

Von **W. Meyer zur Capellen**

Es muß auf S. 77 in der Nebenfigur zu Abb. 4b nicht v_A sondern v_{BA} heißen.

(Eingegangen am 17. Juni 1959.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *Walter Meyer zur Capellen*, Aachen, Technische Hochschule.

DIE BERECHNUNG DER ZYLINDERSCHALEN

Von Dr.-Ing. A. AAS-JACOBSEN, Oslo.

Mit 30 Abbildungen. XII, 160 Seiten Gr.-8°. 1958. Ganzleinen DM 22,50

INHALTSÜBERSICHT:

Bezeichnungen und Parameter · **Grundlagen der Schalentheorie:** Geschichtliche Übersicht. Biegetheorie der isotropen Kreiszylinderschalen. Biegetheorie der Kreiszylinderschalen mit symmetrischen Ringrippen. Biegetheorie der Kreiszylinderschalen mit Ringrippen unterhalb oder oberhalb der Schale · **Flächenlasten. Membrantheorie:** Geschichtliche Übersicht. Das frei aufliegende Kreiszylinderrohr. Die Membrantheorie · **Isotrope Schalen mit Belastung am Längsrand:** Geschichtliche Übersicht. Die charakteristische Gleichung. Die Integrationskonstanten und die Multiplikatoren. Die Lösungsfunktionen und die Verteilungsfunktionen für die Ringrichtung. Zahlentafeln für die Verteilungsfunktionen · **Ringrippenschalen mit Belastung am Längsrand:** Geschichtliche Übersicht. Schalen mit symmetrischen Ringrippen. Schalen mit exzentrischen Ringrippen · **Schalen mit veränderlichem Halbmesser und veränderlicher Schalenstärke:** Geschichtliche Übersicht. Vereinfachte Berechnungsgrundlage. Das Differenzverfahren · **Berechnungsmethoden für Tonnendächer:** Geschichtliche Übersicht. Schalenberechnung nach der mathematischen Elastizitätstheorie. Allgemeine Balkentheorie, Modellschale. Tonnenreihe mit Randbalken ohne Biegesteifigkeit. Tonnenreihe mit biegesteifem Randbalken. Einzeltonnen oder Außenrand der Paralleltonnen. Der Einfluß des Sekundärrandes und der Membrandeformationen. Streifenlasten $P = \sin \lambda\xi$ senkrecht zur Schalenfläche · **Trajektorienbewehrung, Binderberechnung:** Geschichtliche Übersicht. Die Trajektorienbewehrung. Binderberechnung · **Stabilität, Ring- und Längsmomente:** Geschichtliche Übersicht. Eigenwerte des Ringknickens. Eigenwerte des Axialknickens. Bemessung der Schalendruckzone, Ring- und Längsmomente · **Das vorgespannte Tonnendach:** Geschichtliche Übersicht. Berechnungsgrundlagen. Vorgespannte Reihentonnen. Vorgespannte Einzeltonne mit frei aufliegenden Randbalken · **Belastung am Ringrad $x = 0$:** Geschichtliche Übersicht. Die Lösungsfunktion. Schnittgrößen und Verschiebungen. Verteilungsfunktionen · **Literaturverzeichnis · Sachverzeichnis.**

Die Berechnung der weitgespannten Zylinderschalen kann nach der elementaren Balkentheorie erfolgen. Bei mittleren und kurzen Spannweiten versagt dieses Verfahren, und man ist auf elastizitätstheoretische Berechnungen angewiesen. Zahlentafeln erleichtern die notwendigen Berechnungen. Trotz der Vereinfachungen, die dadurch erzielt werden können, bleibt die Berechnung der kleinen und einfachen Schalen noch zu zeitraubend. Eine praktisch brauchbare Lösung ist, die Ringverteilung nach der Elastizitätstheorie und die Längsverteilung nach der elementaren Balkentheorie zu berechnen. Dieses Buch geht einige Schritte weiter auf diesem Wege. Es wird eine „Modellschale" eingeführt, und diese Schale wird so gewählt, daß erstens genaues Berechnen und Tabulieren der Schnittkräfte möglich ist, und zweitens so, daß die Randbedingungen bestmöglichst mit der gegebenen Schale übereinstimmen. Es werden bestimmte Verhältnisse zwischen den Randkräften gewählt, und die Randglieder werden den gewählten Verhältnissen angepaßt. Zahlentafeln einiger Modellschalen mit und ohne Ringrippen werden gegeben. Mittels dieser Zahlentafeln läßt sich die Spannungsverteilung schneller berechnen als nach der elementaren Balkentheorie, auch bei großen Spannweiten. Maßgebend für die Betonabmessungen ist die Stabilität der Schale. Die Knickberechnungen sind darum eingehend untersucht, und ein allgemeines Verfahren ist ausgearbeitet, das sowohl für Stäbe, Bögen, Platten als auch für Schalen gilt. Die genaue Grundlage der Schalentheorie wird untersucht und es wird gezeigt, wie eine iterative Berechnung einfach und mit beliebiger Genauigkeit durchgeführt werden kann. Zahlentafeln der Integrationskonstanten und Multiplikatoren sind beigegeben.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

BAUSTATIK

Theorie und Beispiele

Von Dr.-Ing. habil. KURT HIRSCHFELD,
ord. Professor an der Rhein.-Westf. Technischen Hochschule Aachen.

Mit 1263 Abbildungen (1849 Einzeldarstellungen) im Text und in 217 Zahlenbeispielen sowie 38 Zahlentafeln mit 560 Figuren.
XVI, 823 Seiten Gr.-8°. 1959. **Ganzleinen DM 76,50.**

INHALTSÜBERSICHT:

Einiges über die Grundlagen der Baustatik: Einführung. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften. Darstellung von Auflagerungsmöglichkeiten. Bestimmung des Grades der statischen Unbestimmtheit. Berechnung von Trägheitsmoment, Zentrifugalmoment und Schwerpunkt. Parabelkonstruktion.

Das Verfahren der Kinematik: Allgemein. Die Bewegung der starren Scheibe. Die zwangläufige kinematische Kette. Polpläne. Einflußlinien mit Hilfe von Polplänen. Feststellung der Verschieblichkeit mit Hilfe von Polplänen. Das Verfahren der F'-Figuren. Feststellung der Verschieblichkeit mit Hilfe der F'-Figur. Berechnung einer Schnittkraft mit Hilfe der F'-Figur.

Formveränderungen: Die elastischen Formänderungen. Formänderungsarbeit. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und der virtuellen Arbeiten bei elastischen Körpern. Die Sätze von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen. Satz von CASTIGLIANO. Die Mohrschen Sätze. Auswertung von Formänderungsintegralen. Das Verfahren der ω-Zahlen. Verfahren der W_m-Gewichte. Der Williotsche Verschiebungsplan. Formänderungen an statisch bestimmten Tragwerken.

Verfahren zur Auflösung linearer Gleichungen: Auflösung mit Hilfe von Determinanten. Eliminationsverfahren.

Berechnung statisch unbestimmter Systeme: Kraftgrößenverfahren. Formänderungsverfahren. Iterationsverfahren. Kombinierte Verfahren.

Sonderkapitel der Statik · Aufgaben · Hilfstafeln · Sachverzeichnis.

Sinn und Zweck dieses umfassenden Buches über Baustatik ist, dem Studierenden und dem in der Praxis tätigen Ingenieur zu helfen.

Die Theorien der wichtigsten Verfahren werden in angemessenem Umfang in leichtverständlicher Form behandelt und ihre Anwendung jeweils durch eine Anzahl sorgfältig ausgewählter, vollständig durchgerechneter Zahlenbeispiele gezeigt. Oftmals sind dieselben Beispiele nach verschiedenen Methoden berechnet worden, so daß der Leser ein Gefühl für die Zweckmäßigkeit des zu wählenden Verfahrens bekommt.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag • Berlin • Göttingen • Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6 1.1 K. B./Z. 040.